§ 1 SỐ PHỨC

1. Khái niệm số phức

Ta đã biết rằng các phương trình $x^2 + 1 = 0, x^2 + 4 = 0$ không có nghiệm thực.

Một cách tổng quát các phương trình bậc hai với hệ số thực $Ax^2 + Bx + C = 0$ mà biệt thức $\Delta < 0$, chẳng hạn $x^2 - 2x + 2 = 0$ (biệt thức $\Delta = -4$), đều không có nghiệm thực.

Sự phát triển của toán học, khoa học đòi hỏi phải mở rộng tập hợp các số thực thành một tập hợp số mới gọi là tập hợp các số phức, trong đó có các phép toán cộng và nhân với các tính chất tương tự phép toán cộng và nhân số thực sao cho các phương trình nói trên đều có nghiệm.

Muốn thế, người ta đưa ra số i sao cho bình phương của nó bằng -1. Khi đó i là một nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ và $2i$ là một nghiệm của phương trình $x^2 + 4 = 0$; còn $1 + i$ là một nghiệm của phương trình $x^2-2x+2=0$, tức là phương trình $(x-1)^2 + 1 = 0$,... Các số $a + bi$ ($a,b \in \mathbb{R}$) gọi là các số phức.

Với các số phức, người ta còn chứng minh được rằng mọi phương trình bậc 2, 3, 4, … đều có nghiệm (phức). Số phức cũng liên quan chặt chẽ với hình học phẳng, với lượng giác , ... (xem bài Em có biết "Vài nét lịch sử phát triển số phức", trang 197).

ĐỊNH NGHĨA 1

> Một **số phức** là một biểu thức dạng $a + bi$, trong đó a và b là những số thực và số i thoả mãn $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.
>
> i được gọi là *đơn vị ảo*, a được gọi là *phần thực* và b được gọi là *phần ảo* của số phức $z = a + bi$.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

CHÚ Ý

Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $a + 0i = a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là *số ảo* (còn gọi là số thuần ảo) : $z = 0 + bi = bi \ (b \in \mathbb{R})$; $i = 0 + 1i = 1i$.

Số $0 = 0 + 0i = 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

Ví dụ 1

Số phức $z = 2 + \sqrt{3}i$ có phần thực bằng 2, phần ảo bằng $\sqrt{3}$.

Số phức $z = -i$ (tức là $(-1)i$) có phần thực bằng 0, phần ảo bằng -1 ; đó là một số ảo.

ĐỊNH NGHĨA 2

> **Hai số phức** $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$, $z' = a' + b'i \ (a', b' \in \mathbb{R})$ gọi là **bằng nhau** nếu
>
> $$a = a', \ b = b'.$$
>
> Khi đó ta viết $z = z'$.

H1 *Khi nào số phức $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ bằng 0 ?*

2. Biểu diễn hình học số phức

Ta đã biết biểu diễn hình học các số thực bởi các điểm trên một trục số.

Đối với các số phức, ta hãy xét mặt phẳng toạ độ Oxy. Mỗi số phức $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M có toạ độ $(a ; b)$. Ngược lại, rõ ràng mỗi điểm $M(a ; b)$ biểu diễn một số phức là $z = a + bi$. Ta còn viết $M(a + bi)$ hay $M(z)$.

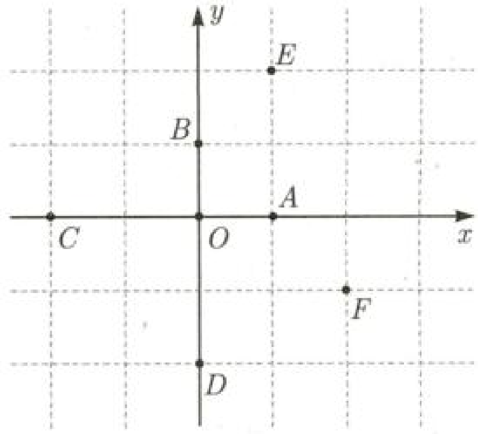
Vì lẽ đó, mặt phẳng toạ độ với việc biểu diễn số phức như thế được gọi là *mặt phẳng phức*.

Gốc toạ độ O biểu diễn số 0.

Các điểm trên trục hoành Ox biểu diễn các số thực, do đó trục Ox còn được gọi là *trục thực*.

Các điểm trên trục tung Oy biểu diễn các số ảo, do đó trục Oy còn được gọi là *trục ảo*.

Trên hình 4.1 có các điểm O, A, B, C, D, E, F theo thứ tự biểu diễn các số phức 0, 1, i, -2, $-2i$, $1 + 2i$, $2 - i$.



Hình 4.1

3. Phép cộng và phép trừ số phức

a) Tổng của hai số phức

ĐỊNH NGHĨA 3

Tổng của hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức

$$z + z' = a + a' + (b + b')i.$$

Như vậy, để cộng hai số phức, ta cộng các phần thực với nhau, cộng các phần ảo với nhau.

Ví dụ 2. Ta có $(3 + i) + (2 - 3i) = 5 - 2i$;

$(1 - 2i) + (2 + 2i) = 3$;

$(2 - 2i) + (-2 + 3i) = i$.

b) Tính chất của phép cộng số phức

Từ định nghĩa 3, dễ thấy phép cộng các số phức có các tính chất sau đây, tương tự phép cộng các số thực.

• Tính chất kết hợp :

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'') \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

• Tính chất giao hoán :

$$z + z' = z' + z \text{ với mọi } z, z' \in \mathbb{C}.$$

• Cộng với 0 :

$$z + 0 = 0 + z = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

• Với mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Số $-z$ được gọi là *số đối* của số phức z.

H2 *Trong mặt phẳng phức, cho điểm M biểu diễn số z. Hãy tìm điểm biểu diễn số –z.*

c) Phép trừ hai số phức

ĐỊNH NGHĨA 4

Hiệu của hai số phức z và z' là tổng của z với $-z'$, tức là

$$z - z' = z + (-z').$$

Nếu $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ thì

$$z - z' = a - a' + (b - b')i.$$

d) Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Trong mặt phẳng phức, ta đã coi điểm M có toạ độ $(a\,;b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$. Ta cũng coi mỗi vectơ $\vec{u}$ có toạ độ $(a\,;b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$.

Khi đó, nói điểm M biểu diễn số phức z cũng có nghĩa là vectơ $\overrightarrow{OM}$ biểu diễn số phức đó.

Dễ thấy rằng, nếu $\vec{u}, \vec{u}'$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì

$\vec{u} + \vec{u}'$ biểu diễn số phức $z + z'$,

$\vec{u} - \vec{u}'$ biểu diễn số phức $z - z'$.

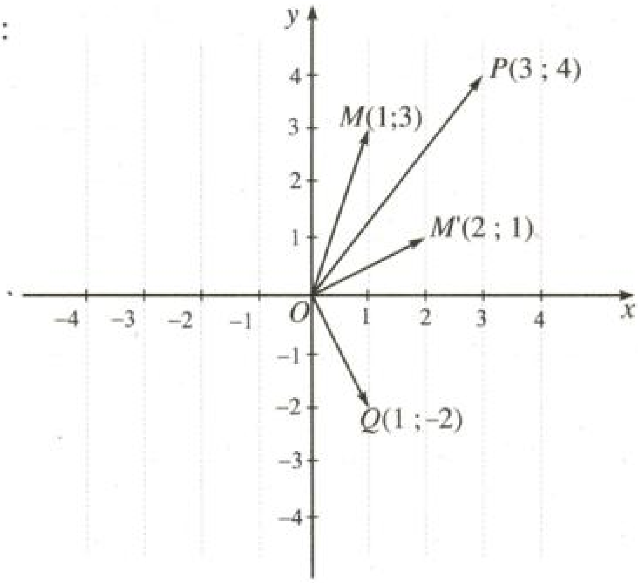
Ví dụ 3. Quan sát hình 4.2, ta thấy :

Vectơ $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ có toạ độ $(1\,;3)$ biểu diễn số phức $z = 1 + 3i$;

Vectơ $\overrightarrow{OM}' = \vec{u}'$ có toạ độ $(2\,;1)$ biểu diễn số phức $z' = 2 + i$;

Vectơ $\overrightarrow{OP} = \vec{u} + \vec{u}'$ có toạ độ $(3\,;4)$ biểu diễn số phức $z + z' = 3 + 4i$;

Vectơ $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{MM'} = \vec{u}' - \vec{u}$ có toạ độ $(1\,;-2)$ biểu diễn số phức $z' - z = 1 - 2i$.



Hình 4.2

4. Phép nhân số phức

a) Tích của hai số phức

Cho hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$. Thực hiện phép nhân một cách hình thức biểu thức $a + bi$ với biểu thức $a' + b'i$, rồi thay $i^2 = -1$, ta được

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + bb'i^2 + (ab' + a'b)i \\ &= aa' - bb' + (ab' + a'b)i.\end{aligned}$$

Điều đó dẫn ta đến định nghĩa sau đây.

ĐỊNH NGHĨA 5

> **Tích của hai số phức** $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức
>
> $$zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

Ví dụ 4. Ta có

$$(2 - i)(1 + 2i) = (2 + 2) + (4 - 1)i = 4 + 3i\ ;$$

$$(2 + i)(2 - i) = (4 + 1) + (-2 + 2)i = 5\ ;$$

$$(2 + i)(1 + 2i) = (2 - 2) + (4 + 1)i = 5i\ .$$

Nhận xét. Với mọi số thực k và mọi số phức $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có

$$k(a + bi) = (k + 0i)(a + bi) = ka + kbi\ ,$$

đặc biệt $0z = 0$ với mọi số phức z.

H3 *Nếu vectơ $\vec{u}$ biểu diễn số phức z thì vectơ $k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$ biểu diễn số phức nào ? Vì sao ?*

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng phức, nếu điểm M biểu diễn số phức z, điểm M' biểu diễn số phức z' (M khác M') thì trung điểm P của đoạn thẳng MM' biểu diễn số phức $\frac{1}{2}(z + z')$. Điều đó suy ra từ hệ thức $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'})$.

H4 *Xét số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Tính z^2 và tìm tập hợp các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho z^2 là số thực.*

b) Tính chất của phép nhân số phức

Từ định nghĩa 5, dễ thấy rằng phép nhân các số phức có các tính chất sau đây tương tự phép nhân các số thực.

- Tính chất giao hoán :

$$zz' = z'z \text{ với mọi } z, z' \in \mathbb{C}.$$

- Tính chất kết hợp :

$$(zz')z'' = z(z'z'') \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

- Nhân với 1 :

$$1.z = z.1 = z \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

- Tính chất phân phối (của phép nhân đối với phép cộng) :

$$z(z' + z'') = zz' + zz'' \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Từ các tính chất nói trên ta có thể thực hiện phép toán cộng và nhân các số phức theo các quy tắc như phép toán cộng và nhân các số thực.

Ví dụ 6. $(z + z')(z - z') = zz + z'z - zz' - z'z' = z^2 - z'^2$;

$(z + z')(z + z') = (z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$;

$(bi)^2 = b^2 i^2 = -b^2$ $(b \in \mathbb{R})$;

$i^3 = i^2.i = -i$, $i^4 = i^2.i^2 = 1$, $i^5 = i$;

$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$.

H5 *Hãy phân tích $z^2 + 4$ thành nhân tử.*

5. Số phức liên hợp và môđun của số phức

a) Số phức liên hợp

ĐỊNH NGHĨA 6

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là $a - bi$ và được kí hiệu bởi $\overline{z}$.

Như vậy

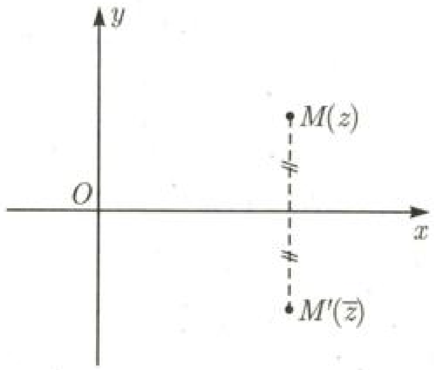
$$\boxed{\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.}$$

Ví dụ 7. $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$;

$\overline{-4 - \sqrt{2}i} = -4 + \sqrt{2}i$;

$\overline{i} = -i$;

$\overline{-i} = i.$



Hình 4.3

• Rõ ràng $\overline{\overline{z}} = z$ nên người ta còn nói z và $\overline{z}$ là *hai số phức liên hợp với nhau* (gọi tắt là *hai số phức liên hợp*).

Hai số phức liên hợp khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng với nhau qua trục thực Ox (h.4.3).

H6 *Chứng minh rằng số phức z là số thực khi và chỉ khi* $z = \overline{z}$.

• Từ định nghĩa 6, dễ suy ra :

Với mọi số phức z, z', ta có

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \;;$$

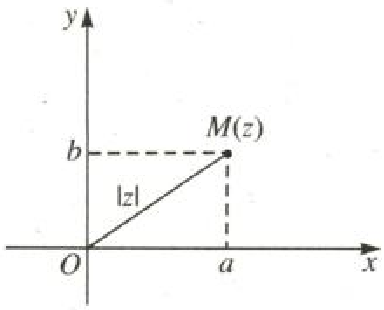
$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

H7 *Chứng minh rằng với mọi số phức* $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, *ta có* $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

b) Môđun của số phức

Ta đã biết giá trị tuyệt đối của số thực a là khoảng cách từ điểm biểu diễn a đến gốc toạ độ trên trục số. Dễ thấy rằng khoảng cách từ điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ đến gốc toạ độ O của mặt phẳng phức là

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} \text{ (h.4.4).}$$



Hình 4.4

ĐỊNH NGHĨA 7

Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$ và được kí hiệu là $|z|$.

Như vậy

$$\text{Nếu } z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \text{ thì } |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ví dụ 8. $|i| = 1$; $|1 + 2i| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Nhận xét

1) Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.

2) $z = 0$ khi và chỉ khi $|z| = 0$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z sao cho $|z| = 1$ là đường tròn bán kính 1 với tâm tại gốc toạ độ.

H8 *Chứng minh rằng $|\overline{z}| = |z|$ với mọi số phức z.*

6. Phép chia cho số phức khác 0

H9 *Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ khác 0. Chứng minh rằng số $z^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(a - bi) = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$ là số thoả mãn $zz^{-1} = 1$.*

ĐỊNH NGHĨA 8

Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

Thương $\dfrac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z, tức là $\dfrac{z'}{z} = z'z^{-1}$.

Như vậy

$$\text{Nếu } z \neq 0 \text{ thì } \frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2}.$$

CHÚ Ý

Do $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}$ nên để tính $\dfrac{z'}{z}$ ta chỉ việc nhân cả tử số và mẫu số với $\overline{z}$.

Ví dụ 10

$$\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-4i}{2}=1-2i\ ;$$

$$\frac{\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-2i}=\frac{(\sqrt{2}+2i)(\sqrt{2}+2i)}{(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)}=\frac{(\sqrt{2}+2i)^2}{(\sqrt{2})^2+2^2}=\frac{-2+4\sqrt{2}\,i}{6}=\frac{-1+2\sqrt{2}\,i}{3};$$

$$\frac{1}{i}=-i.$$

Nhận xét

1) Với $z \neq 0$, ta có $\frac{1}{z}=1.z^{-1}=z^{-1}$.

2) Dễ thấy rằng thương $\frac{z'}{z}$ là số phức w sao cho $zw=z'$. Từ đó có thể nói phép chia (cho số phức khác 0) là phép toán ngược của phép nhân.

H10 *Tìm số phức z thoả mãn* $(1+2i)z=3z-i$.

Câu hỏi và bài tập

1. Cho các số phức

$$2+3i\ ;\ 1+2i\ ;\ 2-i.$$

a) Biểu diễn các số đó trong mặt phẳng phức.

b) Viết số phức liên hợp của mỗi số đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.

c) Viết số đối của mỗi số phức đó và biểu diễn chúng trong mặt phẳng phức.

2. Xác định phần thực và phần ảo của mỗi số sau :

a) $i+(2-4i)-(3-2i)$; b) $(\sqrt{2}+3i)^2$;

c) $(2+3i)(2-3i)$; d) $i(2-i)(3+i)$.

3. Xác định các số phức biểu diễn bởi các đỉnh của một lục giác đều có tâm là gốc toạ độ O trong mặt phẳng phức, biết rằng một đỉnh biểu diễn số i.

4. Thực hiện phép tính

$$\frac{1}{2-3i}\ ;\quad \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\ ;\quad \frac{3-2i}{i}\ ;\quad \frac{3-4i}{4-i}.$$

5. Cho $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Hãy tính : $\frac{1}{z}$; $\overline{z}$; z^2 ; $(\overline{z})^3$; $1 + z + z^2$.

6. Chứng minh rằng :

a) Phần thực của số phức z bằng $\frac{1}{2}(z + \overline{z})$, phần ảo của số phức z bằng $\frac{1}{2i}(z - \overline{z})$;

b) Số phức z là số ảo khi và chỉ khi $z = -\overline{z}$;

c) Với mọi số phức z, z', ta có $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$, và nếu $z \neq 0$ thì $\frac{\overline{z'}}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}$.

7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m > 0$, ta có

$$i^{4m} = 1 \; ; \; i^{4m+1} = i \; ; \; i^{4m+2} = -1 \; ; \; i^{4m+3} = -i.$$

8. Chứng minh rằng :

a) Nếu vectơ $\vec{u}$ của mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thì độ dài của vectơ $\vec{u}$ là $|\vec{u}| = |z|$, và từ đó nếu các điểm A_1, A_2 theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2 thì $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = |z_2 - z_1|$;

b) Với mọi số phức z, z', ta có $|zz'| = |z||z'|$ và khi $z \neq 0$ thì $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$;

c) Với mọi số phức z, z', ta có $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

9. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

a) $|z - i| = 1$; b) $\left|\frac{z - i}{z + i}\right| = 1$; c) $|z| = |\overline{z} - 3 + 4i|$.

Luyện tập

10. Chứng minh rằng với mọi số phức $z \neq 1$, ta có

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^9 = \frac{z^{10} - 1}{z - 1}.$$

11. Hỏi mỗi số sau đây là số thực hay số ảo (z là số phức tuỳ ý cho trước sao cho biểu thức xác định) ?

$$z^2 + (\overline{z})^2 \ ; \qquad \frac{z - \overline{z}}{z^3 + (\overline{z})^3} \ ; \qquad \frac{z^2 - (\overline{z})^2}{1 + z\overline{z}}.$$

12. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

a) z^2 là số thực âm ; b) z^2 là số ảo ;

c) $z^2 = (\overline{z})^2$; d) $\dfrac{1}{z - i}$ là số ảo.

13. Tìm nghiệm phức của các phương trình sau :

a) $iz + 2 - i = 0$; b) $(2 + 3i)z = z - 1$;

c) $(2 - i)\overline{z} - 4 = 0$; d) $(iz - 1)(z + 3i)(\overline{z} - 2 + 3i) = 0$;

e) $z^2 + 4 = 0$.

14. a) Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi $z \neq i$, hãy tìm phần thực và phần ảo của số phức $\dfrac{z + i}{z - i}$.

b) Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện $\dfrac{z + i}{z - i}$ là số thực dương.

15. a) Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Hỏi trọng tâm của tam giác ABC biểu diễn số phức nào ?

b) Xét ba điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thoả mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

16. *Đố vui*. Trong mặt phẳng phức cho các điểm : O (gốc toạ độ), A biểu diễn số 1, B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz'.

Hai tam giác OAB, $OA'B'$ có phải là hai tam giác đồng dạng không ?