§ 4 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

Ta nhắc lại định nghĩa đồ thị của hàm số trong sách giáo khoa Đại số 10 nâng cao.

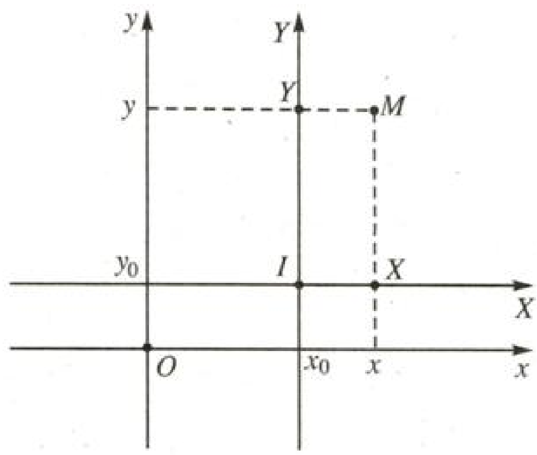
Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $(x ; f(x))$, $x \in \mathcal{D}$ của mặt phẳng toạ độ.

Người ta còn gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường cong có phương trình là $y = f(x)$ (gọi tắt là đường cong $y = f(x)$).

Trong nhiều trường hợp việc thay hệ toạ độ đã có bởi một hệ toạ độ mới giúp ta nghiên cứu đường cong thuận tiện hơn. Bài này giới thiệu phép tịnh tiến hệ toạ độ, nhờ đó có thể xác định được trục đối xứng và tâm đối xứng của một số đường cong.

1. Phép tịnh tiến hệ toạ độ và công thức chuyển hệ toạ độ

Giả sử I là một điểm của mặt phẳng và $(x_0 ; y_0)$ là toạ độ của điểm I đối với hệ toạ độ Oxy. Gọi IXY là hệ toạ độ mới có gốc là điểm I và hai trục IX, IY theo thứ tự có cùng các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ với hai trục Ox, Oy (h.1.5).



Hình 1.5

Giả sử M là một điểm bất kì của mặt phẳng. Gọi $(x ; y)$ là toạ độ của điểm M đối với hệ toạ độ Oxy và $(X ; Y)$ là toạ độ của điểm M đối với hệ toạ độ IXY. Khi đó

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$$

hay

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= (x_0\vec{i} + y_0\vec{j}) + (X\vec{i} + Y\vec{j}) \\ &= (X + x_0)\vec{i} + (Y + y_0)\vec{j}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0. \end{cases}$$

Các hệ thức trên gọi là *công thức chuyển hệ toạ độ* trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$.

2. Phương trình của đường cong đối với hệ toạ độ mới

Giả sử $(\mathscr{G})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đối với hệ toạ độ Oxy đã cho. Khi đó phương trình của đường cong $(\mathscr{G})$ đối với hệ toạ độ Oxy là $y = f(x)$. Ta sẽ viết phương trình của $(\mathscr{G})$ đối với hệ toạ độ mới IXY.

Giả sử M là một điểm bất kì của mặt phẳng, $(x ; y)$ và $(X ; Y)$ là toạ độ của điểm M, theo thứ tự, đối với hệ toạ độ Oxy và IXY. Khi đó,

$$M \in (\mathscr{G}) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Áp dụng công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$, ta có

$$M \in (\mathscr{G}) \Leftrightarrow Y + y_0 = f(X + x_0) \Leftrightarrow Y = f(X + x_0) - y_0.$$

Vậy phương trình của đường cong $(\mathscr{G})$ đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y = f(X + x_0) - y_0.$$

Ví dụ. Cho đường cong $(\mathscr{C})$ có phương trình là

$$y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$$

và điểm $I\,(2 ; -1)$.

a) Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY.

b) Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathscr{C})$.

Giải. a) Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1. \end{cases}$$

Phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y - 1 = \frac{1}{2}X^3 - 1 \text{ hay } Y = \frac{1}{2}X^3.$$

b) Vì $Y = \dfrac{1}{2}X^3$ là một hàm số lẻ nên đồ thị $(\mathscr{C})$ của nó nhận gốc toạ độ I làm tâm đối xứng. □

H *a) Tìm toạ độ đỉnh I của parabol $(\mathscr{P})$ có phương trình là*

$$y = 2x^2 - 4x.$$

b) Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của parabol $(\mathscr{P})$ đối với hệ toạ độ IXY.

Câu hỏi và bài tập

29. Xác định đỉnh I của mỗi parabol $(\mathscr{P})$ sau đây. Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của parabol $(\mathscr{P})$ đối với hệ toạ độ IXY.

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$;　　　　b) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 3$;

c) $y = x - 4x^2$;　　　　d) $y = 2x^2 - 5$.

30. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Xác định điểm I thuộc đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho biết rằng hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

b) Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathscr{C})$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(\mathscr{C})$ tại điểm I đối với hệ toạ độ Oxy. Chứng minh rằng trên khoảng $(-\infty; 1)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của $(\mathscr{C})$ và trên khoảng $(1; +\infty)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Hướng dẫn. Trên khoảng $(-\infty; 1)$, đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến $y = ax + b$ nếu $f(x) < ax + b$ với mọi $x < 1$.

31. Cho đường cong $(\mathscr{C})$ có phương trình là $y = 2 - \dfrac{1}{x+2}$ và điểm $I(-2 ; 2)$. Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của $(\mathscr{C})$.

32. Xác định tâm đối xứng của đồ thị mỗi hàm số sau đây.

a) $y = \dfrac{2}{x-1} + 1$;   b) $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$.

Hướng dẫn. b) Viết công thức đã cho dưới dạng $y = 3 - \dfrac{5}{x+1}$.

33. Cho đường cong $(\mathscr{C})$ có phương trình $y = ax + b + \dfrac{c}{x - x_0}$, trong đó $a \neq 0$, $c \neq 0$ và điểm I có toạ độ $(x_0\,; y_0)$ thoả mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và phương trình của $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathscr{C})$.