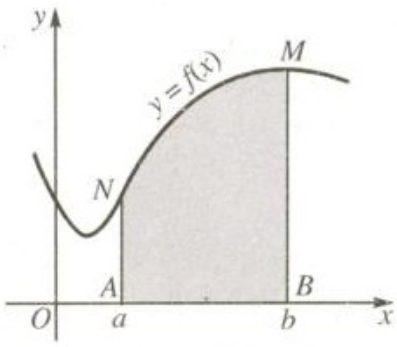
§ 3 TÍCH PHÂN

1. Hai bài toán dẫn đến khái niệm tích phân

a) Diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và lấy giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là *hình thang cong* (phần tô đậm trong hình 3.1).



Hình 3.1

Bài toán đặt ra là tìm công thức tính diện tích của hình thang cong.

Bài toán 1

Cho hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Giả sử f là hàm số liên tục, đồng biến và nhận giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Chứng minh rằng diện tích S của hình thang cong đó là

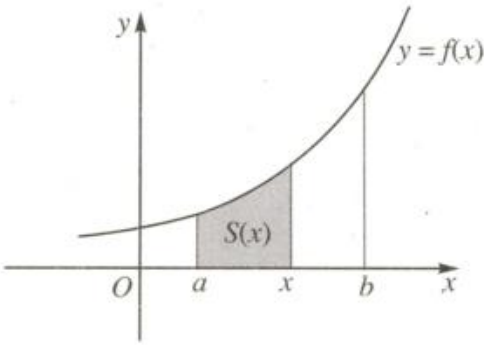
$$S = F(b) - F(a)$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên đoạn $[a ; b]$.

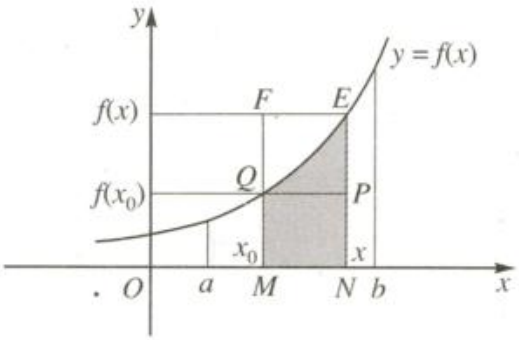
Chứng minh

Kí hiệu $S(x)$ $(a \leq x \leq b)$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a$ và đường thẳng đi qua điểm x trên trục hoành và vuông góc với trục hoành (h.3.2). Như vậy, ta có một hàm số $y = S(x)$ xác định trên đoạn $[a ; b]$.

Trước hết, ta chứng minh $y = S(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a\,;\,b]$. Thật vậy, giả sử x_0 là một điểm tuỳ ý cố định thuộc khoảng $(a\,;\,b)$. Xét điểm $x \in (x_0\,;b]$. Khi đó $S(x) - S(x_0)$ là diện tích hình thang cong $MNEQ$ (h.3.3).



Hình 3.2



Hình 3.3

Do f là hàm đồng biến nên hình thang cong $MNEQ$ nằm trong hình chữ nhật $MNEF$ và chứa hình chữ nhật $MNPQ$. Vậy

$$S_{MNPQ} < S_{MNEQ} < S_{MNEF}$$

tức là $$f(x_0)(x - x_0) < S(x) - S(x_0) < f(x)(x - x_0),$$

suy ra $$f(x_0) < \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} < f(x). \qquad (1)$$

Vì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ nên từ (1) người ta chứng minh được

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Tương tự với $x \in [a\,;x_0)$, ta cũng có $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ hay $S'(x_0) = f(x_0)$.

Vì x_0 là tuỳ ý thuộc $(a\,;b)$, nên suy ra $S'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a\,;b)$. Tương tự, ta có : $S'(a) = f(a), S'(b) = f(b)$. Vậy hàm số $y = S(x)$ là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a\,;\,b]$. Thành thử tồn tại hằng số C sao cho $S(x) = F(x) + C$.

Dễ thấy $S = S(b) - S(a)$.

Do đó $S = S(b) - S(a) = \left(F(b) + C\right) - \left(F(a) + C\right) = F(b) - F(a)$. □

H1 *Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$.*

b) Quãng đường đi được của một vật

Bài toán 2

Giả sử một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian, $v = f(t)$ $(0 < t < T)$. Chứng minh rằng quãng đường L vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ $(0 < a < b < T)$ là

$$L = F(b) - F(a),$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên khoảng $(0 ; T)$.

Chứng minh

Gọi $s = s(t)$ là quãng đường đi được của vật cho đến thời điểm t. Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ là $L = s(b) - s(a)$. Mặt khác, ta đã biết $s'(t) = f(t)$, do đó $s = s(t)$ là một nguyên hàm của f. Thành thử, tồn tại hằng số C sao cho $s(t) = F(t) + C$. Vậy

$$L = s(b) - s(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$ □

2. Khái niệm tích phân

Trong khoa học và kĩ thuật, có nhiều đại lượng quan trọng được biểu thị bằng hiệu $F(b) - F(a)$ trong đó F là một nguyên hàm của hàm số f nào đó.

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số

$$F(b) - F(a)$$

được gọi là **tích phân của f từ a đến b** và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Trong trường hợp $a < b$, ta gọi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là *tích phân của f trên đoạn* $[a\,;\,b]$.

H2 *Chứng minh rằng* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *là một số không phụ thuộc vào việc chọn nguyên hàm F nào trong họ các nguyên hàm của f.*

Người ta còn dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Như vậy nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.}$$

Vì $\int f(x)dx$ là một nguyên hàm bất kì của f nên ta có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_a^b.$$

Người ta gọi hai số a, b là hai *cận tích phân*, số a là *cận dưới*, số b là *cận trên*, f là *hàm số dưới dấu tích phân*, $f(x)\mathrm{d}x$ là *biểu thức dưới dấu tích phân* và x là *biến số lấy tích phân*.

CHÚ Ý

Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x. Chẳng hạn, nếu sử dụng chữ t, chữ u,... làm biến số lấy tích phân thì

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$, ... đều là một số và số đó bằng $F(b) - F(a)$.

Ví dụ 1. $\int_3^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \left(\ln|x|\right)\Big|_3^5 = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$;

$\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right)\Bigg|_2^4 = 6 + \ln 2.$ □

Với định nghĩa tích phân, bài toán 1 có thể phát biểu lại như sau :

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đồng biến và nhận giá trị dương trên đoạn $[a ; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Tổng quát, người ta chứng minh được

ĐỊNH LÍ 1

> Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a ; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là
>
> $$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

H3 *Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian $v = f(t)$. Chứng minh rằng quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm a đến thời điểm b là $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Ví dụ 2. Một ôtô đang chạy với vận tốc 20m/s thì người lái đạp phanh (còn nói là "thắng"). Sau khi đạp phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

Giải. Lấy mốc thời gian là lúc ôtô bắt đầu được phanh. Gọi T là thời điểm ôtô dừng. Ta có $v(T) = 0$ suy ra $20 = 40T$ hay $T = 0,5$. Như vậy, khoảng thời gian từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn của ôtô là 0,5 giây. Trong khoảng thời gian 0,5 giây đó, ôtô di chuyển được quãng đường là

$$L = \int_0^{0,5} (20 - 40t)\,dt = (20t - 20t^2)\Big|_0^{0,5} = 5 \text{ (m)}.$$

3. Tính chất của tích phân

Các tính chất cơ bản của tích phân được phát biểu trong định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K. Khi đó ta có

1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$;

2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$;

3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$;

4) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

5) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Ta chứng minh các tính chất 3) và 4).

Giả sử F là một nguyên hàm của f.

3) Ta có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b)$$

$$= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.$$

4) Áp dụng định lí 2 của §1 ta có

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \left(\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b + \left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

H4 *Hãy chứng minh các tính chất 1), 2) và 5).*

Ví dụ 3. Cho $\int_1^3 f(x)\,dx = -2$ và $\int_1^3 g(x)\,dx = 3$.

Hãy tính

$$\int_1^3 [3f(x) - g(x)]\,dx \text{ và } \int_1^3 [5 - 4f(x)]\,dx.$$

Giải

$$\int_1^3 [3f(x) - g(x)]\,dx = 3\int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 g(x)\,dx = 3.(-2) - 3 = -9.$$

$$\int_1^3 [5 - 4f(x)]\,dx = 5\int_1^3 dx - 4\int_1^3 f(x)\,dx = 5.2 - 4.(-2) = 18.$$ □

H5 *Tìm b nếu biết rằng*

$$\int_0^b (2x - 4)\,dx = 0.$$

Câu hỏi và bài tập

10. Không tìm nguyên hàm, hãy tính các tích phân sau :

a) $\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$; b) $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$; c) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

Hướng dẫn. Áp dụng định lí 1.

11. Cho biết $\int_1^2 f(x)\,dx = -4$, $\int_1^5 f(x)\,dx = 6$, $\int_1^5 g(x)\,dx = 8$. Hãy tính

a) $\int_2^5 f(x)\,dx$; b) $\int_1^2 3f(x)\,dx$;

c) $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$; d) $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

12. Cho biết $\int_0^3 f(z)\mathrm{d}z = 3$, $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 7$. Hãy tính $\int_3^4 f(t)\mathrm{d}t$.

13. a) Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a ; b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

b) Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a ; b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

14. a) Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t$ (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$(s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s).

b) Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

15. Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ (m/s^2). Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

16. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu 25m/s. Gia tốc trọng trường là 9,8m/s^2.

a) Sau bao lâu viên đạn đạt tới độ cao lớn nhất ?

b) Tính quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Bài đọc thêm

TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN VÀ KHÁI NIỆM TỔNG TÍCH PHÂN

1. Tính gần đúng tích phân

Từ định nghĩa tích phân ta thấy muốn tính tích phân $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ thì phải tìm được một nguyên hàm F của f. Mặc dù nguyên hàm này chắc chắn tồn tại nhưng trong nhiều trường hợp ta không thể tìm được biểu thức tường minh của $F(x)$ qua các hàm sơ cấp đã biết. (Chẳng hạn, người ta đã chứng minh rằng nguyên hàm của các hàm số $y = e^{-x^2}$, $y = \frac{\sin x}{x}$, $y = \sqrt{1+x^4}$, ... không thể biểu diễn qua các hàm sơ cấp đã biết.). Trong những trường hợp như vậy, việc *tính đúng* tích phân $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là không thể thực hiện được. Vậy có thể tính gần đúng tích phân đó được không ?

a) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và lấy giá trị dương trên đoạn $[a\,;\,b]$. Xét hình thang cong H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (trên hình 3.4, hàm số $f(x) = 5 - x^2$, $a = -1$, $b = 2$). Gọi S là diện tích của H.

Theo định lí 1 ta có $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

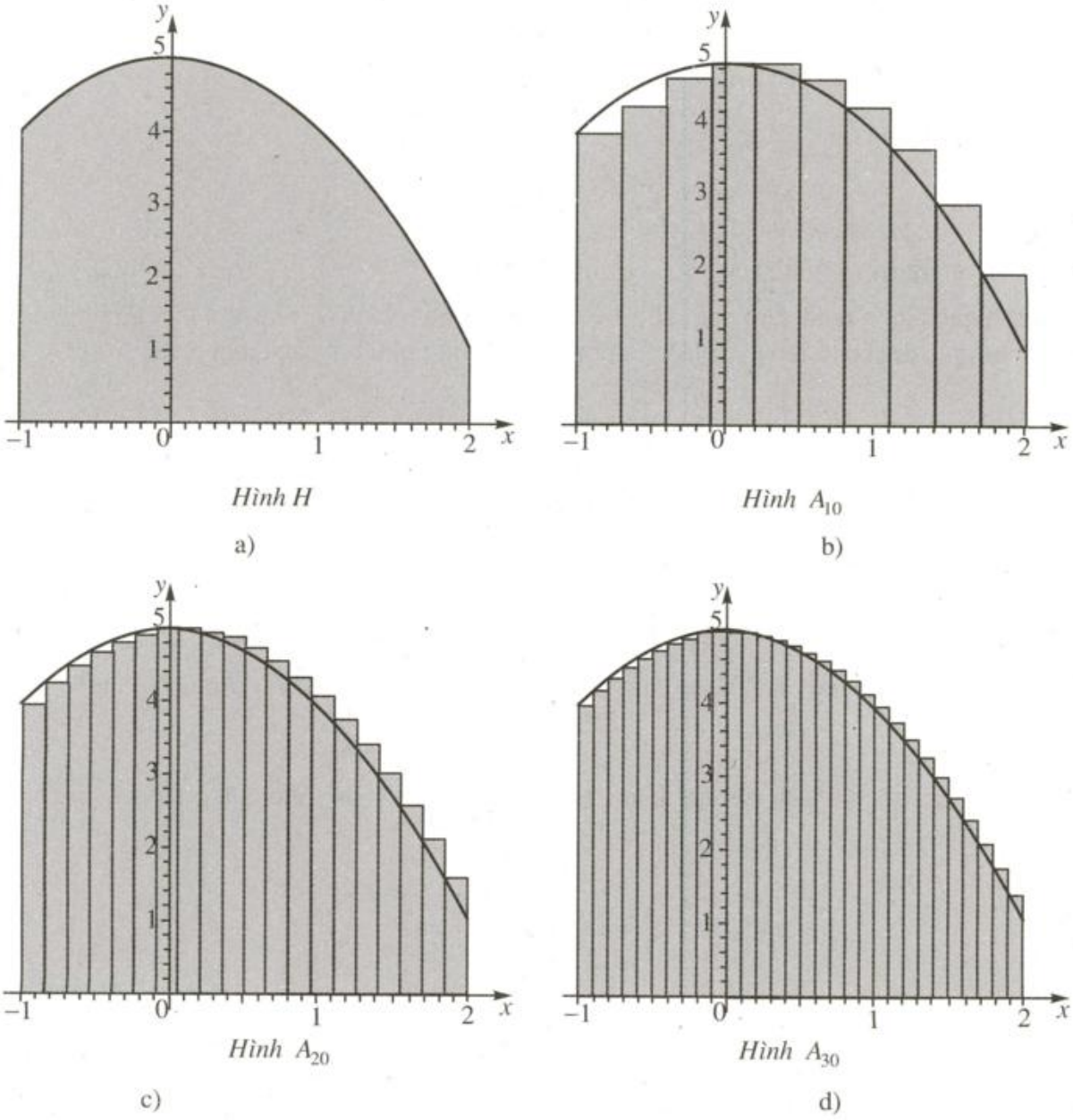
Với mỗi số nguyên dương n, ta chia đoạn $[a;\,b]$ làm n đoạn con bằng nhau bởi các điểm $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$,..., $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$,..., $x_n = b$ $(k = 0, 1, 2, ..., n)$.

Dựng các hình chữ nhật B_k với đáy là đoạn thẳng $[x_k\,;\,x_{k+1}]$, chiều cao là $f(x_k)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Diện tích của hình chữ nhật B_k là $f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$. Gọi A_n là hợp của n hình chữ nhật $B_0, B_1, ..., B_{n-1}$ (xem hình 3.4b với $n = 10$) và $S(A_n)$ là diện tích của hình A_n. Ta có $S(A_n)$ là tổng diện tích của n hình chữ nhật $B_0, B_1, ..., B_{n-1}$.

Vậy $S(A_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$.

Khi số điểm chia n càng lớn, số hình chữ nhật $B_0, B_1, ..., B_{n-1}$ càng nhiều thì diện tích $S(A_n)$ của hình A_n càng gần với diện tích S của H (xem hình 3.4c với $n = 20$, hình 3.4d với $n = 30$). Vậy $S \approx S(A_n)$ nghĩa là

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$



Hình 3.4

b) Có thể nhận được công thức gần đúng trên với lập luận như sau : Giả sử một vật chuyển động với vận tốc $v = f(t)$. Ta chia khoảng thời gian [a; b] thành n khoảng thời gian bằng nhau $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Với n khá lớn thì khoảng thời gian $(t_k ; t_{k+1})$ khá bé nên có thể coi rằng trong khoảng thời gian đó vật chuyển động với vận tốc không đổi. Khi đó, quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $(t_k ; t_{k+1})$ xấp xỉ

bằng $f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$. Thành thử quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian [a ; b] xấp xỉ bằng $\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$. Mặt khác, ta đã biết quãng đường đi được là $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Vậy ta có

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k).$$

2. Khái niệm tổng tích phân

Một cách tổng quát, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn [a ; b]. Với mỗi số nguyên dương n, ta chia đoạn [a ; b] làm n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_n = b\ \ (k = 0, 1, 2\ldots, n).$$

Mỗi đoạn con đều có độ dài bằng $\frac{b-a}{n}$.

Kí hiệu $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$

S_n được gọi là tổng tích phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn [a ; b].

Người ta đã chứng minh được định lí sau đây, gọi là định lí cơ bản của tích phân

Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn [a ; b]. Gọi S_n là tổng tích phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn [a, b]. Khi đó

$$\lim S_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Thành thử khi n lớn ta có $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$

Như vậy tổng tích phân S_n dùng để tính xấp xỉ tích phân. Khi cấp n càng lớn thì tổng tích phân S_n càng gần với tích phân $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ và sự xấp xỉ càng tốt, độ chính xác càng cao.

Chú ý. Về mặt lịch sử, khái niệm tích phân được hình thành độc lập với khái niệm nguyên hàm. Tích phân của hàm số f trên đoạn [a ; b] được định nghĩa là giới hạn

của tổng tích phân cấp n của f trên đoạn $[a; b]$. Đẳng thức $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, mà ta dùng làm định nghĩa tích phân, được tìm ra sau đó bởi hai nhà toán học Niu-tơn và Lai-bơ-nit. Đẳng thức đó cho ta mối liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm và được gọi là công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit.

Em có biết

NGUỒN GỐC CỦA KÍ HIỆU NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Kí hiệu tích phân là do nhà toán học thiên tài người Đức Lai-bơ-nit (1646 – 1716) đưa ra. Tích phân của hàm số f trên đoạn $[a ; b]$ được ông định nghĩa là giới hạn của tổng tích phân.

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k). \qquad (1)$$

Thời Lai-bơ-nit, hiệu $x_{k+1} - x_k$ thường được viết là $\mathrm{d}x_k = x_{k+1} - x_k$ do d là chữ đầu của chữ La-tinh "diferentia" (hiệu số). Do đó, giới hạn (1) được viết lại thành

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\mathrm{d}x_k.$$

Kí hiệu $\sum$ (tổng số) cũng như chữ S có nguồn gốc từ chữ La-tinh "summa" (có nghĩa là tổng số). Dấu tích phân $\int$ là một biến dạng đơn giản của chữ S.

Kí hiệu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ muốn nói rằng đây là *giới hạn của tổng các số hạng* $f(x_k)\,\mathrm{d}x_k$.

Thành thử, giới hạn (1) được kí hiệu là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Công thức $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$ với F là nguyên hàm tuỳ ý của f nêu lên mối liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm và kí hiệu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ được dùng để chỉ các nguyên hàm của f. Việc coi $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ là một nguyên hàm bất kì của f dẫn đến công thức trực quan và tiện lợi là $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b$. Người ta còn gọi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là tích phân xác định và $\int f(x)\mathrm{d}x$ là tích phân bất định (không xác định) của hàm f.