§ 1 TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Trong bài này ta sẽ ứng dụng đạo hàm để xét tính *đơn điệu* (tức là tính *đồng biến* và tính *nghịch biến*) của hàm số.

Trước hết ta nhắc lại định nghĩa hàm số đồng biến và hàm số nghịch biến trong sách giáo khoa Đại số 10 nâng cao.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và f là hàm số xác định trên K.

Hàm số f được gọi là *đồng biến* trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ ;$$

Hàm số f được gọi là *nghịch biến* trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Nói một cách khác, nếu hàm số f xác định trên K thì

Hàm số f đồng biến trên K khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc K, ta có

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \text{ với mọi } \Delta x \neq 0 \text{ mà } x + \Delta x \in K.$$

Hàm số f nghịch biến trên K khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc K, ta có

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0 \text{ với mọi } \Delta x \neq 0 \text{ mà } x + \Delta x \in K.$$

Từ đó, người ta chứng minh được điều sau đây :

> Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.
>
> a) Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.
>
> b) Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

Đảo lại, có thể chứng minh được :

ĐỊNH LÍ

> Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.
>
> a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I.
>
> b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I.
>
> c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I.

Định lí trên cho ta một điều kiện đủ để hàm số đơn điệu trên một khoảng.

CHÚ Ý

Khoảng I trong định lí trên có thể được thay bởi một đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải bổ sung giả thiết "Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn :

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a ; b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a ; b]$.

Người ta thường diễn đạt khẳng định này qua bảng biến thiên như sau :

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ nghịch biến trên đoạn $[0 ; 1]$.

Giải

Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0 ; 1]$. Ngoài ra, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} < 0$ với mọi $x \in (0 ; 1)$. Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[0 ; 1]$. □

• Việc tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của một hàm số còn được nói gọn là xét *chiều biến thiên của hàm số* đó.

Qua định lí đã nêu, ta thấy việc xét chiều biến thiên của một hàm số có đạo hàm có thể chuyển về việc xét dấu đạo hàm của nó.

Ví dụ 2. Xét chiều biến thiên của hàm số

$$y = x + \frac{4}{x}\cdot$$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}\cdot$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Chiều biến thiên của hàm số được nêu trong bảng sau :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	-4	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ -2)$ và $(2\ ;\ +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ 2)$.

$\boxed{\text{H1}}$ *Xét chiều biến thiên của hàm số*

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3.$$

Ví dụ 3. Xét chiều biến thiên của hàm số

$$y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3.$$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

$y' = 0$ với $x = \dfrac{1}{2}$ và $y' > 0$ với mọi $x \neq \dfrac{1}{2}\cdot$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$-\frac{17}{6}$	$\nearrow$	

Theo chú ý sau định lí, hàm số đã cho đồng biến trên mỗi nửa khoảng $\left(-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$ và $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right)$. Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét. Qua ví dụ 3, ta thấy có thể mở rộng định lí đã nêu như sau :

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$ (hoặc $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I.

H2 *Xét chiều biến thiên của hàm số*

$$y = 2x^5 + 5x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3}.$$

Câu hỏi và bài tập

1. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau :

a) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$;

b) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$;

c) $y = x + \dfrac{3}{x}$;

d) $y = x - \dfrac{2}{x}$;

e) $y = x^4 - 2x^2 - 5$;

f) $y = \sqrt{4 - x^2}$.

2. Chứng minh rằng

a) Hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó ;

b) Hàm số $y = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

3. Chứng minh rằng các hàm số sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$; b) $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$.

4. Với giá trị nào của a hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

5. Tìm các giá trị của tham số a để hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Luyện tập

6. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$; b) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 8x + 9}{x - 5}$; d) $y = \sqrt{2x - x^2}$;

e) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$; f) $y = \dfrac{1}{x+1} - 2x$.

7. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \cos 2x - 2x + 3$$

nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

8. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\sin x < x$ với mọi $x > 0$,

$\sin x > x$ với mọi $x < 0$;

Hướng dẫn. Chứng minh hàm số $f(x) = x - \sin x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

b) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ với mọi $x \neq 0$;

c) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ với mọi $x > 0$,

$\sin x < x - \dfrac{x^3}{6}$ với mọi $x < 0$.

9. Chứng minh rằng

$$\sin x + \tan x > 2x \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right).$$

Hướng dẫn

Chứng minh hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5},$$

($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 và năm 1995.

b) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$. Tìm f' và xét chiều biến thiên của hàm số f trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$.

c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/ năm).

- Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 và năm 2008 của thị trấn.
- Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người / năm ?