§ 5 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

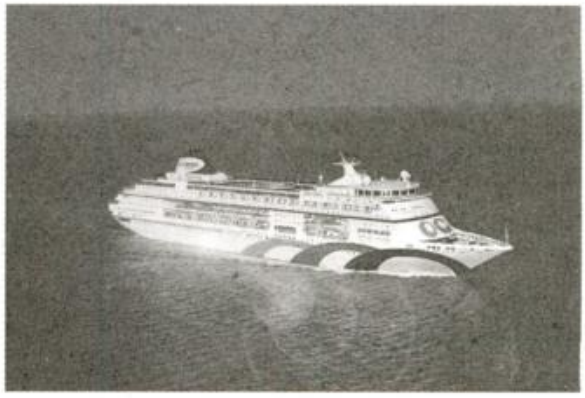
Trong thực tiễn cuộc sống cũng như trong khoa học kĩ thuật, người ta cần phải tính diện tích của những hình phẳng cũng như thể tích của những vật thể phức tạp. Chẳng hạn :

Khi xây dựng một nhà máy thuỷ điện, để tính lưu lượng của dòng sông ta phải tính diện tích thiết diện ngang của dòng sông. Thiết diện đó thường là một hình khá phức tạp.

Khi đóng tàu, các kĩ sư cần xác định thể tích của khoang tàu có hình dạng đặc biệt.

Trước khi phép tính tích phân ra đời, với mỗi hình và mỗi vật thể như vậy người ta lại phải nghĩ ra một cách để tính. Sự ra đời của tích phân cho chúng ta một phương pháp tổng quát để giải hàng loạt những bài toán tính diện tích và thể tích nói trên.

Trong §5 ta nói về ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng và trong §6 nói về ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể.



Trong định lí 1 §3, ta đã biết : Nếu $y = f(x)$ là một hàm liên tục và lấy giá trị không âm trên đoạn $[a ; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

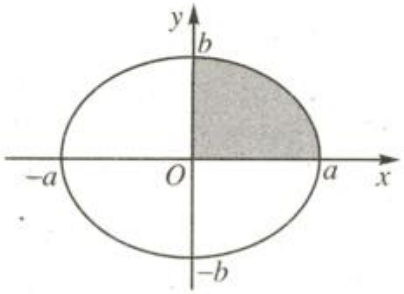
Việc tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong thường được quy về tính diện tích của hình thang cong bằng cách chia hình phẳng đó thành một số hình thang cong.

Ví dụ 1 (*Diện tích hình elip*). Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0).$$

Giải

Ta tính diện tích S của một phần tư hình elip nằm trong góc phần tư thứ nhất. Đó là một hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = a$ (h.3.5).



Hình 3.5

Vậy $S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Ta tính tích phân trên bằng phương pháp đổi biến số.

Đặt $x = a\sin t$. Ta có

$$dx = d(a\sin t) = a\cos t\,dt,\ 0 = a\sin 0 \text{ và } a = a\sin\frac{\pi}{2}.$$

Do đó

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}.a\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t}.a\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt$$

(vì $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$).

Suy ra $S = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}$.

Vậy diện tích hình elip là $4S = \pi ab$.

• Một cách tổng quát, ta có

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;b]$ thì diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (1)}$$

Ví dụ 2. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$, đường thẳng $x = 2$, trục tung và trục hoành.

Giải. (h.3.6) Đặt $f(x) = x^3 - 1$.

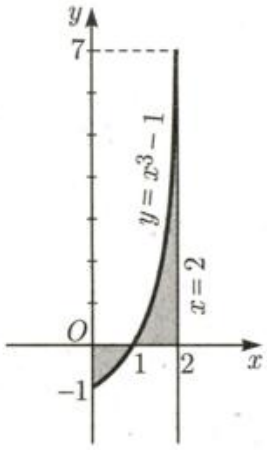
Ta thấy $f(x) \le 0$ trên $[0 ; 1]$ và $f(x) \ge 0$ trên $[1 ; 2]$.

Theo công thức (1), diện tích S của hình đang xét là

$$S = \int_0^2 |x^3 - 1| dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{7}{2}.$$

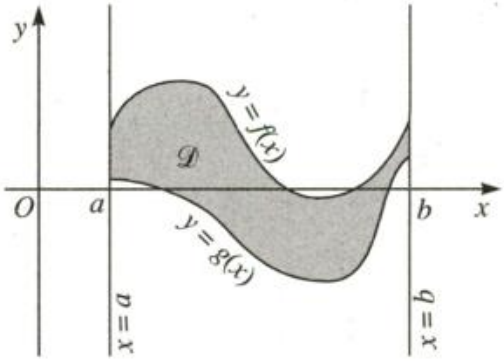


Hình 3.6

H1 *Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành.*

• Để tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (h.3.7), ta có công thức sau :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \qquad (2)$$



Hình 3.7

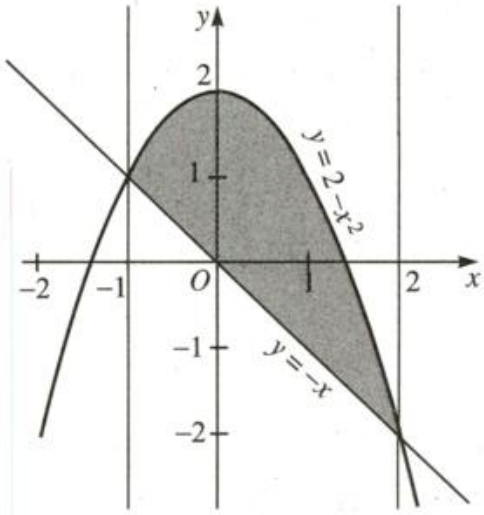
Ví dụ 3. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$.

Giải (h.3.8)

Trước hết, ta tìm hoành độ giao điểm các đồ thị của hai hàm số đã cho bằng cách giải phương trình $2 - x^2 = -x$. Ta có

$$2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x = -1 \text{ và } x = 2.$$

Hình phẳng đang xét giới hạn bởi các đồ thị của hai hàm số $y = 2 - x^2$, $y = -x$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.



Hình 3.8

Theo công thức (2) ta có

$$S = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,dx$$

$$= \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

H2 *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 2$ và parabol $y = x^2 + x - 2$.*

• Để tính diện tích một số hình phẳng phức tạp hơn ta phải chia hình đã cho thành một số hình đơn giản mà ta đã biết cách tính diện tính.

Ví dụ 4. Tính diện tích S của hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y = x - 2$.

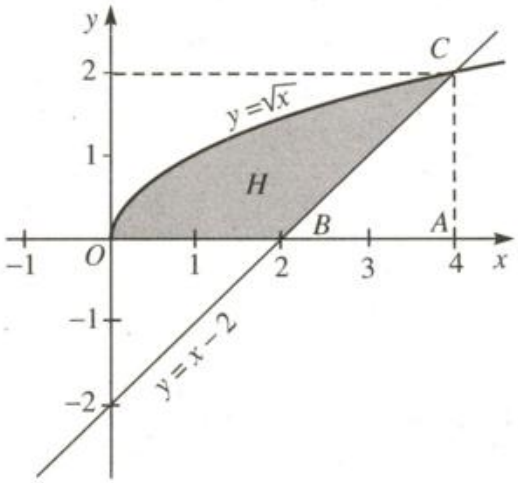
Giải (h.3.9)

Ta tìm hoành độ giao điểm các đồ thị của hai hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = x - 2$ bằng cách giải phương trình $\sqrt{x} = x - 2$. Kết quả được $x = 4$.

Diện tích S của hình H bằng diện tích hình tam giác cong OCA trừ đi diện tích hình tam giác ABC.

Diện tích hình tam giác cong OCA là

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3}.$$



Hình 3.9

Diện tích hình tam giác ABC là

$$\frac{AB.AC}{2} = \frac{2.2}{2} = 2.$$

Vậy $S = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$.

CHÚ Ý

Tương tự (bằng cách coi x là hàm của biến y), diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = g(y)$, $x = h(y)$ (g và h là hai hàm liên tục trên đoạn $[c ; d]$) và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ là

$$S = \int_c^d |g(y) - h(y)| \, dy. \qquad (3)$$

Chẳng hạn trong ví dụ 4, coi hình H là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = y^2$, đường thẳng $x = y + 2$, trục hoành $y = 0$ và đường thẳng $y = 2$. Do đó, ta có thể tính ngay S theo công thức (3) như sau :

$$S = \int_0^2 (y + 2 - y^2)\,dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{10}{3}.$$

Câu hỏi và bài tập

26. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \frac{7\pi}{6}$.

27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = \cos^2 x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = \pi$;

b) Đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}$ và $y = \sqrt[3]{x}$;

c) Đồ thị hai hàm số $y = 2x^2$ và $y = x^4 - 2x^2$ trong miền $x \geq 0$.

28. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị các hàm số $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 - 2x$ và hai đường thẳng $x = -3$, $x = -2$;

b) Đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 4$ và $y = -x^2 - 2x$;

c) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 4$.