II – HƯỚNG DẪN CHI TIẾT

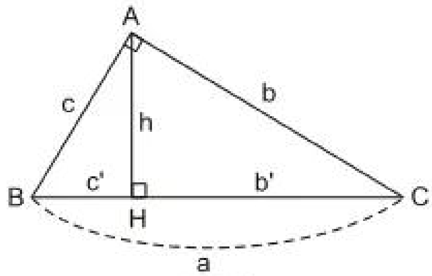
§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

A. MỤC TIÊU

Qua bài này, HS cần :

– Nhận biết được các cặp tam giác vuông đồng dạng trong hình 1.

– Biết thiết lập các hệ thức $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$, $h^2 = b'c'$, $ah = bc$ và $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ dưới sự dẫn dắt của GV.



Hình 1

– Biết vận dụng các hệ thức trên để giải bài tập.

B. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Các hệ thức trong bài đều được suy ra từ những cặp tam giác vuông đồng dạng (trừ hệ thức cuối) mà các cặp tam giác vuông này đều là hai trong ba tam giác vuông của hình 1. Chính vì vậy, cần cho HS nhận biết triệt để các cặp tam giác đồng dạng ở hình này.

• Nên dùng phương pháp "phân tích đi lên" để HS nhận biết được : Muốn có hệ thức cụ thể nào đó thì cần có cặp tam giác vuông tương ứng nào đồng dạng ? (Lưu ý cho HS viết theo các đỉnh tương ứng).

• Cần cho HS hoạt động tích cực để thiết lập được các hệ thức trong bài.

C. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1. Chuẩn bị của HS

GV nhắc HS ôn lại các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông.

2. Nêu tình huống dẫn đến bài mới

Có thể dùng nội dung trong khung ở đầu §1 hoặc một tình huống nào đó để vào bài.

3. Các hoạt động

Bài này được dạy trong 3 tiết : 2 tiết lí thuyết, 1 tiết luyện tập.

Tiết 1. Dạy định lí 1, định lí 2.

• Kiểm tra bài cũ : Tìm các cặp tam giác vuông đồng dạng trong hình 1.

• Tiến hành bài giảng theo trình tự SGK.

• GV hướng dẫn HS chứng minh định lí 1 bằng "phân tích đi lên" để tìm ra cần chứng minh $\Delta AHC \backsim \Delta BAC$ và $\Delta AHB \backsim \Delta CAB$. Chẳng hạn,

$$b^2 = ab' \Leftarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{b} \Leftarrow \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Leftarrow \Delta AHC \backsim \Delta BAC.$$

Sau đó, GV trình bày chứng minh định lí này.

• Đối với ví dụ 1, GV gợi ý để HS quan sát hình và nhận xét được $a = b' + c'$, rồi cho HS tính $b^2 + c^2$. Sau đó, GV lưu ý cho HS : Có thể coi đây là một cách chứng minh khác của định lí Py-ta-go (nhờ tam giác đồng dạng).

• Đối với hệ thức (2), sau khi giới thiệu định lí 2, GV cho HS làm $\boxed{?1}$. Bắt đầu từ kết luận, dùng "phân tích đi lên" để xác định được cần chứng minh hai tam giác vuông nào đồng dạng. Từ đó HS thấy được yêu cầu chứng minh $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ trong $\boxed{?1}$ là hợp lí.

• *Đáp*. $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ vì $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ với góc ABH). Do đó $\frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA}$, suy ra $AH^2 = HB.HC$ hay $h^2 = b'.c'$.

• Kết thúc tiết dạy bằng giải quyết bài tập 1, bài tập 2. Có thể dùng phiếu học tập có ghi sẵn hai bài tập này để kiểm tra sự tiếp thu của HS (kiểm tra 10 phút).

Tiết 2. Dạy định lí 3, định lí 4.

• Đối với định lí 3, HS có thể có ngay hệ thức (3) dựa vào công thức tính diện tích tam giác. Song GV vẫn cần yêu cầu HS làm $\boxed{?2}$ để chứng minh hệ thức (3) nhờ tam giác đồng dạng, bởi vì, cho đến lúc này, công thức tính diện tích tam giác vẫn chưa được chứng minh (mặc dù HS đã quen thuộc với công thức này). GV hướng dẫn HS tìm cách chứng minh định lí bằng phương pháp "phân tích đi lên". Qua đó, luyện cho HS một phương pháp giải toán thường dùng.

Đáp. Ta có $\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ (h.1 SGK) vì chúng có chung góc nhọn B. Do đó $\dfrac{AC}{HA} = \dfrac{BC}{BA}$, suy ra AC.BA = BC.HA, tức là bc = ah.

• Đối với định lí 4, GV hướng dẫn HS biến đổi từ hệ thức cần chứng minh để đến được với hệ thức đã có như sau :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Leftarrow \frac{1}{h^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2c^2} \Leftarrow h^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} \Leftarrow h^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{ah = bc} \Rightarrow a^2h^2 = b^2c^2$$

Như vậy xuất phát từ hệ thức (3), biến đổi theo chiều "$\Rightarrow$" ta sẽ thu được hệ thức (4).

• Kết thúc tiết dạy bằng việc giải các bài tập 3 và 4.

Tiết 3. Chữa các bài tập 5, 6, 7, 8, 9.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

1. a) (h.4a SGK)

$x + y = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$; $6^2 = x.(x + y)$. Từ đó suy ra

$$x = \frac{6^2}{10} = 3{,}6 \; ; \quad y = 10 - 3{,}6 = 6{,}4.$$

b) (h.4b SGK)

$12^2 = x.20 \Leftrightarrow x = \dfrac{12^2}{20} = 7{,}2$;

Suy ra $y = 20 - 7{,}2 = 12{,}8$.

2. (h.5 SGK)

$x^2 = 1(1 + 4) = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$.

$y^2 = 4(1 + 4) = 20 \Rightarrow y = \sqrt{20}$.

3. (h.6 SGK)

$y = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$; $xy = 5.7 = 35$.

Từ đó suy ra $x = \dfrac{35}{\sqrt{74}}$.

4. (h.7 SGK)

$2^2 = 1.x \Leftrightarrow x = 4.$

$y^2 = x(1 + x) = 4(1 + 4) = 20 \Rightarrow y = \sqrt{20}.$

5. (h.2) Tam giác ABC vuông tại A có AB = 3, AC = 4. Theo định lí Py-ta-go, tính được BC = 5.

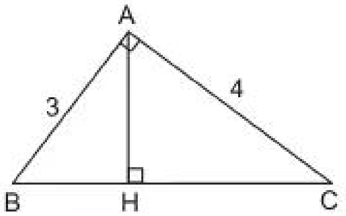
Mặt khác, $AB^2 = BH.BC$, suy ra

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{3^2}{5} = 1{,}8\ ;$$

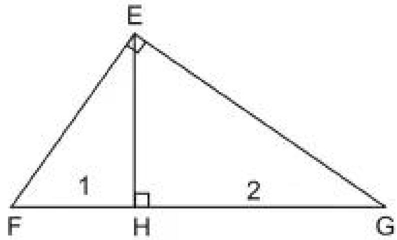
$$CH = BC - BH = 5 - 1{,}8 = 3{,}2.$$

Ta có $\quad AH.BC = AB.AC$, suy ra

$$AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{3.4}{5} = 2{,}4.$$



Hình 2



Hình 3

6. (h.3) FG = FH + HG = 1 + 2 = 3 ;

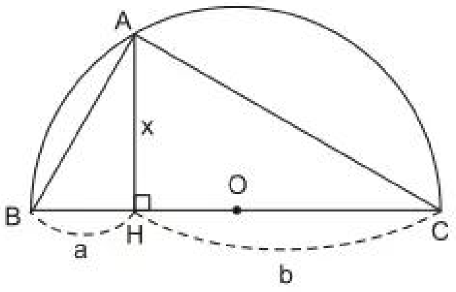
$EF^2 = FH.FG = 1.3 = 3 \Rightarrow EF = \sqrt{3}\ ;$

$EG^2 = GH.FG = 2.3 = 6 \Rightarrow EG = \sqrt{6}.$

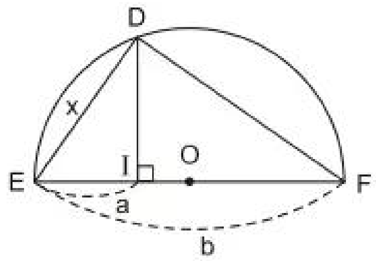
7. *Cách 1.* (h.4)

Theo cách dựng, tam giác ABC có đường trung tuyến AO ứng với cạnh BC bằng một nửa cạnh đó, do đó tam giác ABC vuông tại A. Vì vậy

$$AH^2 = BH.CH \text{ hay } x^2 = ab.$$



Hình 4



Hình 5

Cách 2. (h.5)

Theo cách dựng, tam giác DEF có đường trung tuyến DO ứng với cạnh EF bằng một nửa cạnh đó, do đó tam giác DEF vuông tại D. Vậy

$$DE^2 = EI.EF \text{ hay } x^2 = a.b.$$

8. a) $x^2 = 4.9 \Rightarrow x = 6$.

b) Do các tam giác tạo thành đều là tam giác vuông cân nên $x = 2$ và $y = \sqrt{8}$.

c) $12^2 = x.16 \Rightarrow x = \dfrac{12^2}{16} = 9$;

$y^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow y = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.

9. (h.6)

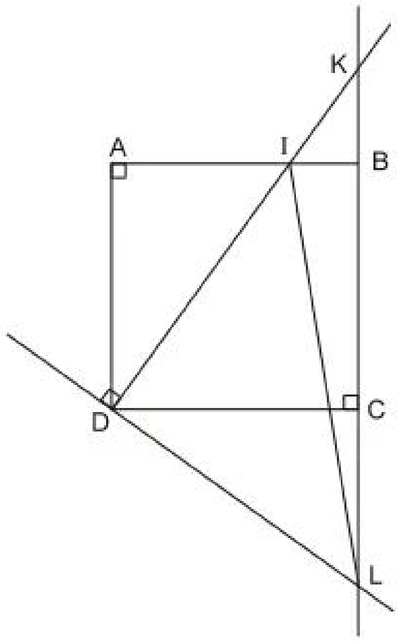
a) Để chứng minh tam giác vuông DIL là tam giác cân, ta sẽ chứng minh DI = DL. Hai tam giác vuông ADI và CDL có AD = CD, $\widehat{ADI} = \widehat{CDL}$ (vì cùng phụ với góc CDI). Do đó chúng bằng nhau, suy ra DI = DL.

b) Theo a), ta có

$$\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2}. \qquad (1)$$

Mặt khác, trong tam giác vuông DKL có DC là đường cao ứng với cạnh huyền KL, do đó

$$\frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}. \qquad (2)$$



Hình 6

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2} \text{ (không đổi)},$$

tức là $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

E. TÀI LIỆU BỔ SUNG

Về các định lí đảo của bốn định lí trong §1

1. Đối với định lí 1

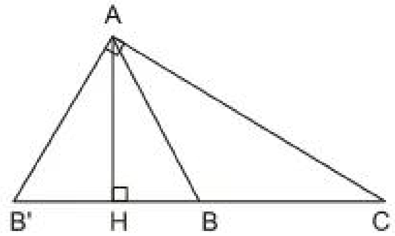
Định lí 1 có định lí đảo theo nghĩa sau :

Trong một tam giác, nếu có hai cạnh thoả mãn : Bình phương của mỗi cạnh trong chúng bằng tích hình chiếu của cạnh đó trên đường thẳng chứa cạnh thứ ba và cạnh thứ ba, thì tam giác đó là một tam giác vuông.

Chứng minh

• Trước tiên, bằng phản chứng ta chứng minh rằng "Nếu một tam giác thoả mãn các giả thiết của định lí đảo ở trên thì chân của đường cao ứng với cạnh thứ ba nằm giữa hai đỉnh của tam giác đó".

Thật vậy, giả sử tồn tại tam giác ABC có $AB^2 = BH.BC$, $AC^2 = CH.BC$, trong đó H là chân của đường cao ứng với cạnh BC và H nằm ngoài đoạn BC (chẳng hạn H thuộc tia đối của tia BC). Từ A, kẻ AB' vuông góc với AC, B' thuộc đường thẳng BC (h.7).



Hình 7

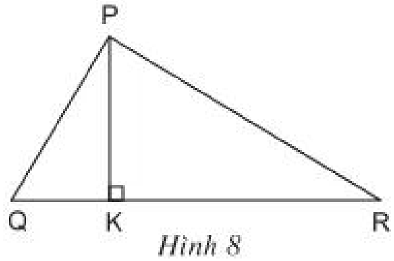
Theo định lí 1, trong tam giác vuông AB'C, ta có

$$AC^2 = HC.B'C.$$

Từ đó suy ra BC = B'C. Vô lí !

H cũng không thể trùng với B hoặc C, vì khi đó không thể có cả hai đẳng thức trong giả thiết. Vậy H nằm giữa B và C.

• Xét tam giác PQR có $PQ^2 = QK.QR$ và $PR^2 = RK.QR$, trong đó K là chân của đường cao ứng với QR. Theo chứng minh trên, K phải nằm giữa Q và R (h.8).



Hình 8

Ta có $PQ^2 + PR^2 = QK.QR + RK.QR$

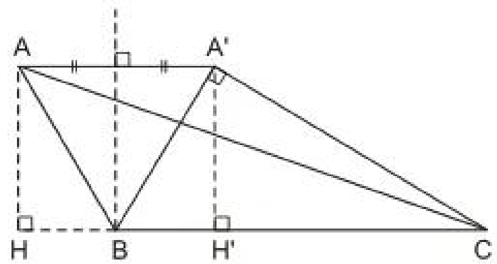
$$= (QK + RK)QR = QR^2.$$

Vậy theo định lí Py-ta-go đảo, tam giác PQR vuông tại P.

Chú ý. Nếu tam giác ABC chỉ có

$AB^2 = BH.BC$ hoặc $AC^2 = CH.BC$,

trong đó H là chân của đường cao ứng với cạnh BC, thì không suy ra được tam giác ABC vuông tại A. Cụ thể, xét tam giác ABC trong hình 9. Dễ thấy rằng



Hình 9

$$AB^2 = A'B^2 = BH'.BC = BH.BC.$$

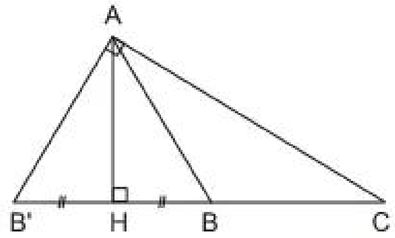
Tuy nhiên, tam giác ABC không phải là một tam giác vuông.

2. Đối với định lí 2

Mệnh đề đảo của định lí 2 như sau :

Nếu tam giác ABC *có đường cao* AH *thoả mãn* $AH^2 = HB.HC$ *thì tam giác đó là một tam giác vuông.*

Xét tam giác ABC trong hình 10. Dễ thấy rằng $AH^2 = HB.HC$. Tuy nhiên, tam giác ABC không phải là tam giác vuông. Điều đó có nghĩa là mệnh đề đảo của định lí 2 không đúng, nó không là một định lí.



Hình 10

Với điều kiện nào thì mệnh đề đảo của định lí 2 đúng ?

Trong tam giác ABC, với đường cao AH, ta có

$$AB^2 + AC^2 = AH^2 + HB^2 + AH^2 + HC^2$$

$$= HB^2 + 2HB.HC + HC^2 = (HB + HC)^2.$$

Tam giác ABC vuông tại A $\Leftrightarrow$ HB + HC = BC $\Leftrightarrow$ H nằm giữa B và C.

Vậy khi chân của đường cao đang xét nằm giữa hai đỉnh tam giác thì mệnh đề đảo của định lí 2 là đúng.

Tóm lại, định lí 2 có định lí đảo theo nghĩa : *Nếu một tam giác có bình phương đường cao ứng với một cạnh bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh kia trên cạnh ấy và chân của đường cao này nằm giữa hai đỉnh của tam giác thì tam giác đó là một tam giác vuông.*

3. Đối với định lí 3

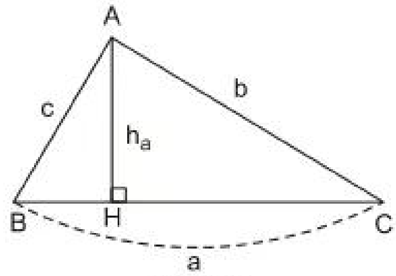
Xét mệnh đề đảo của định lí 3 : *Nếu một tam giác có tích của đường cao ứng với một cạnh và cạnh đó bằng tích của hai cạnh còn lại thì tam giác đó là một tam giác vuông.*

Mệnh đề này có đúng hay không ? Để có câu trả lời, ta xét bài toán sau :

Trong tam giác ABC, đường cao AH của nó thoả mãn AH.BC = AB.AC. Tam giác ABC có là tam giác vuông hay không ?

Giải

Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao của tam giác ABC ứng với cạnh a, b và c (h.11).



Hình 11

Ta có $ah_a = 2S_{ABC} = bh_b$.

Do đó $ah_a = bh_b = bc \Leftrightarrow h_b = c \Leftrightarrow AB \perp AC$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Tóm lại, mệnh đề đảo của định lí 3 đúng, tức là định lí 3 có định lí đảo.

4. Đối với định lí 4

Nhìn chung định lí 4 không có định lí đảo. Chẳng hạn, xét hình 10, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB'^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2},$$

song tam giác ABC không phải là một tam giác vuông.

Tuy nhiên, khi chân của đường cao đang xét nằm giữa hai đỉnh của tam giác thì định lí 4 có định lí đảo. Cụ thể, ta có định lí sau :

Trong một tam giác, nếu có đường cao ứng với một cạnh thoả mãn :

– Chân của đường cao nằm giữa hai đỉnh của tam giác ;

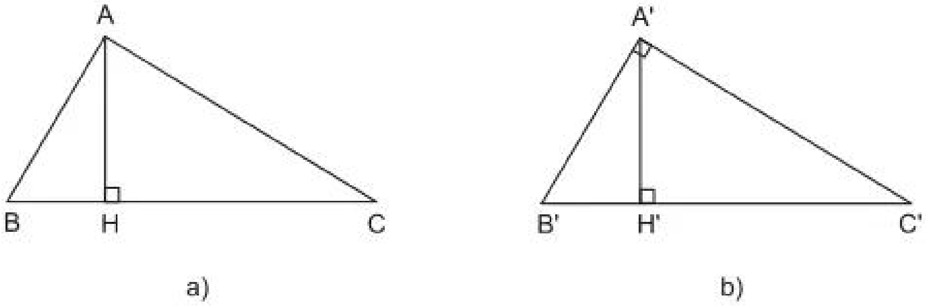
– Nghịch đảo của bình phương đường cao bằng tổng các nghịch đảo của bình phương mỗi cạnh còn lại ;

thì tam giác đó là một tam giác vuông.

Chứng minh (h.12)

Xét tam giác ABC có đường cao AH thoả mãn :

$$\text{H nằm giữa B và C, } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$



Hình 12

Dựng tam giác A'B'C' vuông tại A' có A'B' = AB, A'C' = AC. Theo định lí 4, đường cao A'H' thoả mãn :

$$\frac{1}{A'H'^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}.$$

Suy ra AH = A'H'.

Hai tam giác vuông AHB và A'H'B' có AB = A'B', AH = A'H' nên chúng bằng nhau. Suy ra BH = B'H'. Tương tự, ta có CH = C'H'. Vì H nằm giữa B và C ; H' nằm giữa B' và C' nên

$$BC = BH + CH = B'H' + C'H' = B'C'.$$

Vậy $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c), suy ra tam giác ABC vuông tại A.