

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

A. MỤC TIÊU

Qua bài này, HS cần :

- Biết phối hợp các kĩ năng biến đổi biểu thức chứa căn thức bậc hai.
- Biết sử dụng kĩ năng biến đổi biểu thức chứa căn thức bậc hai để giải các bài toán liên quan.

B. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Các công thức $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (với A, B là các biểu thức mà $A \geq 0, B \geq 0$), $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với A, B là các biểu thức mà $A \geq 0, B > 0$), hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$, các công thức (tuy không nêu tường minh) như $m\sqrt{A} \pm n\sqrt{A} = (m \pm n)\sqrt{A}$ (với $A \geq 0$) đều được xem là các phép biến đổi biểu thức chứa căn thức bậc hai.

Việc phối hợp các phép biến đổi biểu thức chứa căn thức bậc hai thường được đặt ra dưới yêu cầu : Rút gọn biểu thức hoặc chứng minh đẳng thức,....

• Khi phối hợp các phép biến đổi căn thức với các biến đổi biểu thức đã có (đặc biệt là biến đổi phân thức đại số) thì có hai nội dung cần chú ý :

+ Thứ nhất là các biến đổi căn thức thường gắn với các điều kiện để căn thức có nghĩa, nên các biến đổi phân thức đi kèm cũng cần chú ý điều kiện xác định.

+ Thứ hai là, yêu cầu rút gọn phân thức đại số khá rõ ràng, nhưng yêu cầu rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai thường tùy thuộc mục đích cụ thể của bài toán. Ví dụ, để kết quả rút gọn P ở ví dụ 3 là $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$ chứ không phải là

$\frac{(1-a)\sqrt{a}}{a}$ (ở dạng không có căn ở mẫu) là xét theo yêu cầu bài toán ở câu sau :

Tìm giá trị a để $P < 0$.

Những điều chưa có thể nêu thật rõ ràng như trên sẽ được SGK thể hiện qua các ví dụ. GV nên lưu ý thêm cho HS qua trình bày lời giải các bài tập ở lớp.

C. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Bài này được dạy trong 2 tiết : 1 tiết lí thuyết, 1 tiết luyện tập.

• Ngay tiết lí thuyết cũng chủ yếu nhằm dạy thực hành. *Tính lí thuyết* được giới thiệu qua định hướng và dẫn dắt cho các ví dụ. Bởi vậy, tiến trình giờ dạy là GV giới thiệu ví dụ như bài mẫu và sau đó cho HS thực hành bằng cách trả lời các [?].

• Kết quả [?1] là $13\sqrt{5a} + \sqrt{a}$ hay $(13\sqrt{5} + 1)\sqrt{a}$ đều được chấp nhận.

• Hướng dẫn HS làm [?2], GV nên định hướng : Biến đổi vế trái để được vế phải và nên làm hai cách (có thể chữa kĩ một cách, và gợi ý cách còn lại).

$$\text{Cách 1. } \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = a - \sqrt{ab} + b.$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2. } \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \\ &= \frac{a^2 + b\sqrt{ab} - a\sqrt{ab} - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b) - \sqrt{ab}(a - b)}{a - b} \\ &= \frac{(a - b)(a + b - \sqrt{ab})}{a - b} = a + b - \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

• Với [?3] có thể làm theo hai cách sau :

$$\text{a) Cách 1. } \frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}} = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x + \sqrt{3}} = x - \sqrt{3} \quad (\text{với } x \neq -\sqrt{3}).$$

$$\text{Cách 2. } \frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}} = \frac{(x^2 - 3)(x - \sqrt{3})}{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})} = \frac{(x^2 - 3)(x - \sqrt{3})}{x^2 - 3} = x - \sqrt{3}$$

(với $x \neq -\sqrt{3}$).

$$\text{b) Cách 1. } \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} = \frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)}{1 - \sqrt{a}} = 1 + \sqrt{a} + a \text{ (với } a \geq 0 \text{ và } a \neq 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2. } \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} &= \frac{(1 - a\sqrt{a})(1 + \sqrt{a})}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a})} = \frac{1 - a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a^2}{1 - a} \\ &= \frac{(1 - a)(1 + \sqrt{a} + a)}{1 - a} = 1 + \sqrt{a} + a \text{ (với } a \geq 0 \text{ và } a \neq 1). \end{aligned}$$

• Trong tiết luyện tập, GV có thể thực hiện theo trình tự sau :

+ Chữa bài tập 58 và làm hai câu ở bài tập 62 để luyện tập kĩ năng rút gọn biểu thức số.

+ Chữa bài tập 59 và làm câu a) bài 63 để luyện tập kĩ năng rút gọn biểu thức chữ.

+ Chữa bài tập 60 và làm bài tập 65 tại lớp để luyện dạng toán rút gọn biểu thức và sử dụng kết quả rút gọn.

+ Giao các câu và bài tập còn lại cho HS làm ở nhà.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

$$58. \text{ a) } 3\sqrt{5} ; \qquad \text{b) } \frac{9}{\sqrt{2}} \text{ hay } \frac{9\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\text{c) } 15\sqrt{2} - \sqrt{5} ; \qquad \text{d) } 3,4 \cdot \sqrt{2}.$$

$$59. \text{ a) } -\sqrt{a} ; \qquad \text{b) } -5ab\sqrt{ab}.$$

$$60. \text{ a) } B = 4\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} = 4\sqrt{x+1}.$$

$$\text{b) Đưa về } \sqrt{x+1} = 4. \text{ Suy ra } x = 15.$$

$$61. \text{ a) Biến đổi vế trái thành } \frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{4}{2}\sqrt{6} \text{ và làm tiếp.}$$

$$\text{b) Biến đổi vế trái thành } \left(\sqrt{6x} + \frac{1}{3}\sqrt{6x} + \sqrt{6x} \right) : \sqrt{6x} \text{ và làm tiếp.}$$

$$62. a) \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} - 2.5\sqrt{3} - \sqrt{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{10}{3}\sqrt{3}$$

$$= \frac{-17\sqrt{3}}{3}.$$

b) $11\sqrt{6}$;

c) 21 ;

d) 11.

63. a) $\left(\frac{2}{b} + 1\right)\sqrt{ab}$ (với $a > 0$ và $b > 0$) ;

b) $\sqrt{\frac{m}{(1-x)^2} \cdot \frac{4m \cdot (1-x)^2}{81}} = \sqrt{\frac{4m^2}{81}} = \frac{\sqrt{4m^2}}{\sqrt{81}} = \frac{2m}{9}$ (với $m > 0$ và $x \neq 1$).

64. a) Biến đổi vế trái thành $(1 + \sqrt{a} + a + \sqrt{a})\left(\frac{1}{1 + \sqrt{a}}\right)^2$ và làm tiếp.

b) Rút gọn vế trái thành $\frac{a+b}{b^2} \cdot \frac{|a|b^2}{|a+b|}$; với $a+b > 0$ và $b \neq 0$, sẽ rút gọn tiếp được kết quả.

65. Rút gọn được $M = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}}$.

Viết M ở dạng $M = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}}$, suy ra $M < 1$.

66. Chọn (D). Đây là tổng của hai số dương nghịch đảo nhau nên giá trị không nhỏ hơn 2.

Cách khác. Tính và chọn kết quả (cách này không thật đúng tinh thần loại toán trắc nghiệm lắm song đáp ứng nhu cầu củng cố rút gọn biểu thức kết hợp giới thiệu dạng câu hỏi có lựa chọn kết quả).