

§8. Vị trí tương đối của hai đường tròn (tiếp theo)

A. MỤC TIÊU

Qua bài này, HS cần :

– Nắm được hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính của hai đường tròn ứng với từng vị trí tương đối của hai đường tròn. Hiểu được khái niệm tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

– Biết vẽ hai đường tròn tiếp xúc ngoài, tiếp xúc trong ; biết vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Biết xác định vị trí tương đối của hai đường tròn dựa vào hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính.

– Thấy được hình ảnh của một số vị trí tương đối của hai đường tròn trong thực tế.

B. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

• Việc tìm các hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính của hai đường tròn trong bài có kết hợp với các yếu tố trực giác để phù hợp với HS lớp 9.

Một cách chứng minh chặt chẽ hệ thức đặc trưng cho các vị trí tương đối của hai đường tròn bằng phương pháp đại số được giới thiệu ở mục *Tài liệu bổ sung*.

• Khi dạy về tiếp tuyến chung của hai đường tròn, chỉ yêu cầu HS biết đặt thước "chạm" vào hai đường tròn để vẽ tiếp tuyến chung. Cách dùng thước và compa để dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn được nêu ở mục *Tài liệu bổ sung* (để GV tham khảo, không dạy cho HS).

C. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1. Chuẩn bị của GV

GV nên có bảng vẽ sẵn các vị trí của hai đường tròn, tiếp tuyến chung của hai đường tròn, hình ảnh một số vị trí tương đối của hai đường tròn trong thực tế.

Nếu có máy chiếu, GV có thể dùng hai *bản trong* vẽ hai đường tròn (O) và (O'), rồi di chuyển một *bản trong* để cho đoạn nối tâm nhỏ dần, nhằm minh họa lần lượt các vị trí : hai đường tròn ở ngoài nhau, tiếp xúc ngoài, cắt nhau, tiếp xúc trong, (O) đựng (O'), đồng tâm.

Cũng có thể tiến hành bằng cách di chuyển đường tròn (O') bằng dây thép tiến dần đến đường tròn (O) được vẽ sẵn trên bảng.

2. Hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính

• Cho HS quan sát hình 90 SGK.

Hỏi. Dự đoán quan hệ giữa OO' với $R + r$ và $R - r$.

Đáp. $R - r < OO' < R + r$.

• HS làm [?1].

Đáp. Trong tam giác AOO' , ta có

$$OA - O'A < OO' < OA + O'A, \text{ tức là } R - r < OO' < R + r.$$

• *Hỏi.* Khi nào thì hai đường tròn tiếp xúc nhau ?

Đáp. Hai đường tròn tiếp xúc nhau khi chúng chỉ có một điểm chung.

• GV giới thiệu hai trường hợp tiếp xúc nhau : (O) và (O') tiếp xúc ngoài, tiếp xúc trong.

• Cho HS dự đoán quan hệ độ dài giữa OO' với R, r trong trường hợp hai đường tròn tiếp xúc ngoài, trong trường hợp hai đường tròn tiếp xúc trong.

• HS làm [?2].

Đáp. Theo tính chất hai đường tròn tiếp xúc nhau, ba điểm O, A, O' thẳng hàng.

a) A nằm giữa O và O' nên $OA + AO' = OO'$, tức là $R + r = OO'$.

b) O' nằm giữa O và A nên $OO' + O'A = OA$, tức là $OO' + r = R$, do đó $OO' = R - r$.

• GV dùng bảng vẽ sẵn các hình 93, 94 SGK hoặc dùng máy chiếu lần lượt giới thiệu hai trường hợp hai đường tròn (O) và (O') không giao nhau : (O) và (O') ở ngoài nhau, (O) đựng (O'). Sau đó giới thiệu tiếp hai đường tròn đồng tâm.

• *Hỏi.* Điền dấu (=, >, <) thích hợp vào chỗ trống (...) trong các câu sau :

a) Nếu hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau thì $OO' \dots R + r$.

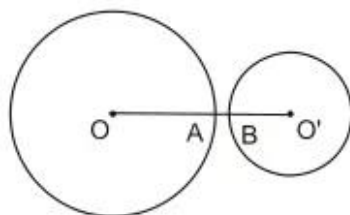
b) Nếu đường tròn (O) đựng đường tròn (O') thì $OO' \dots R - r$.

Đáp.

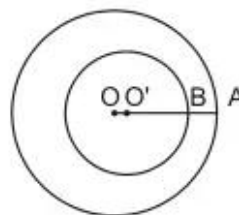
a) (h.72a) $OO' > R + r$. Giải thích :

$$OO' = OA + AB + BO' = R + AB + r.$$

Vậy $OO' > R + r$.



a)



b)

Hình 72

b) (h.72b) $OO' < R - r$. Giải thích :

$$OO' = OA - O'B - AB = R - r - AB.$$

Vậy $OO' < R - r$.

• GV ghi lại các kết quả đã có :

(O) và (O') cắt nhau $\Rightarrow R - r < OO' < R + r$.

(O) và (O') tiếp xúc ngoài $\Rightarrow OO' = R + r$.

(O) và (O') tiếp xúc trong $\Rightarrow OO' = R - r > 0$

(O) và (O') ở ngoài nhau $\Rightarrow OO' > R + r$.

(O) đựng (O') $\Rightarrow OO' < R - r$.

• GV khẳng định rằng mệnh đề đảo của các mệnh đề trên cũng đúng và ghi tiếp dấu mũi tên ngược (\Leftarrow) vào các mệnh đề trên.

• Cho HS tự nghiên cứu bảng tóm tắt trong SGK.

• GV có thể *củng cố* cho HS bằng bài toán sau : Cho các đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; r)$ trong đó $OO' = 8\text{cm}$. Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn nếu :

a) $R = 5\text{cm}$, $r = 3\text{cm}$;

b) $R = 7\text{cm}$, $r = 3\text{cm}$.

Đáp. a) Tiếp xúc ngoài.

b) Cắt nhau.

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

• Cho HS quan sát hình 95, 96 SGK. Giới thiệu khái niệm tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

• Dùng hình 95 SGK giới thiệu tiếp tuyến chung ngoài (không cắt đoạn nối tâm).

• Dùng hình 96 SGK giới thiệu tiếp tuyến chung trong (cắt đoạn nối tâm).

• HS làm $\boxed{?3}$ (h.97 SGK) (GV có thể vẽ sẵn hình 97 SGK vào bảng).

Đáp. Hình 97a : Tiếp tuyến chung ngoài d_1 và d_2 , tiếp tuyến chung trong m .

Hình 97b : Tiếp tuyến chung ngoài d_1 và d_2 .

Hình 97c : Tiếp tuyến chung ngoài d .

Hình 97d : Không có tiếp tuyến chung.

• GV giới thiệu với HS các vị trí tương đối của hai đường tròn trong thực tế ở hình 98 SGK.

4. Củng cố

Bài tập 35.

5. Hướng dẫn về nhà

Bài tập 36, 37.

6. Tiết luyện tập

• Chữa các bài tập 36, 37.

• Luyện tập tại lớp các bài tập 38, 39.

Lưu ý HS. Tổng quát kết quả ở câu c) của bài tập 39, ta có : Với $OA = R$, $O'A = r$ thì độ dài BC bằng $2\sqrt{Rr}$.

• HS về nhà làm bài tập 40, bài tập 41 (câu a), b)) và ôn tập chương II theo các câu hỏi trong SGK.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SGK

35.

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d, R, r
(O) đựng (O')	0	$d < R - r$
Ở ngoài nhau	0	$d > R + r$
Tiếp xúc ngoài	1	$d = R + r$
Tiếp xúc trong	1	$d = R - r$
Cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$

36. (h.73)

a) Gọi (O') là đường tròn đường kính OA. Vì $OO' = OA - O'A$ nên hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong.

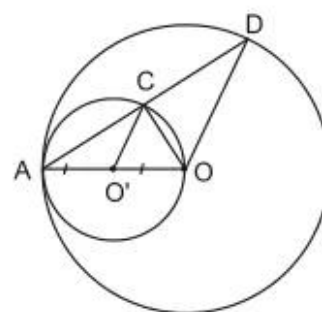
b) Cách 1. Các tam giác cân $AO'C$ và AOD có chung góc ở đỉnh A nên $\widehat{ACO'} = \widehat{D}$, suy ra $O'C \parallel OD$.

Tam giác AOD có $AO' = O'O$ và $O'C \parallel OD$ nên $AC = CD$.

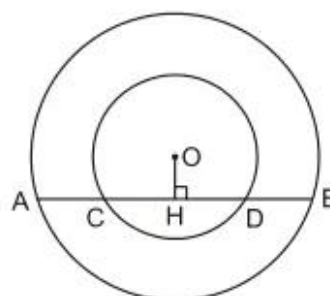
Cách 2. Tam giác ACO có đường trung tuyến CO' bằng $\frac{1}{2}AO$ nên $\widehat{ACO} = 90^\circ$. Tam giác AOD cân tại O có OC là đường cao nên là đường trung tuyến, do đó $AC = CD$.

37. (h.74) Giả sử C nằm giữa A và B (trường hợp D nằm giữa A và B chứng minh tương tự).

Kẻ $OH \perp CD$. Ta có $HA = HB$, $HC = HD$. Từ đó ta chứng minh được $AC = BD$.



Hình 73



Hình 74

38. a) Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm tiếp xúc ngoài với đường tròn (O ; 3cm) nằm trên đường tròn (O ; 4cm).
 b) Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm tiếp xúc trong với đường tròn (O ; 3cm) nằm trên đường tròn (O ; 2cm).

39. (h.75)

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có

$$IB = IA, IC = IA.$$

Tam giác ABC có đường trung tuyến

AI bằng $\frac{1}{2}BC$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

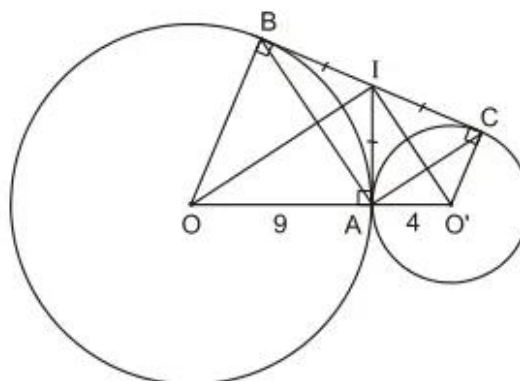
b) IO, IO' là các tia phân giác của hai góc kề bù nên

$$\widehat{OIO'} = 90^\circ.$$

c) Tam giác OIO' vuông tại I có IA là đường cao nên

$$IA^2 = AO \cdot AO' = 9 \cdot 4 = 36.$$

Do đó IA = 6cm. Suy ra BC = 2.IA = 12 (cm).



Hình 75

40. Trên các hình 99a, 99b SGK, hệ thống bánh răng chuyển động được. Trên hình 99c, hệ thống bánh răng không chuyển động được.

Cách giải thích. Vẽ chiều quay của từng bánh xe. Nếu hai đường tròn tiếp xúc ngoài thì hai bánh xe quay theo hai chiều khác nhau (một bánh xe quay cùng chiều quay của kim đồng hồ, bánh xe kia quay ngược chiều quay của kim đồng hồ). Nếu hai đường tròn tiếp xúc trong thì hai bánh xe quay theo chiều như nhau.

E. TÀI LIỆU BỔ SUNG

1. Một cách chứng minh chặt chẽ hệ thức đặc trưng cho các vị trí tương đối của hai đường tròn bằng phương pháp đại số

Xét hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r).

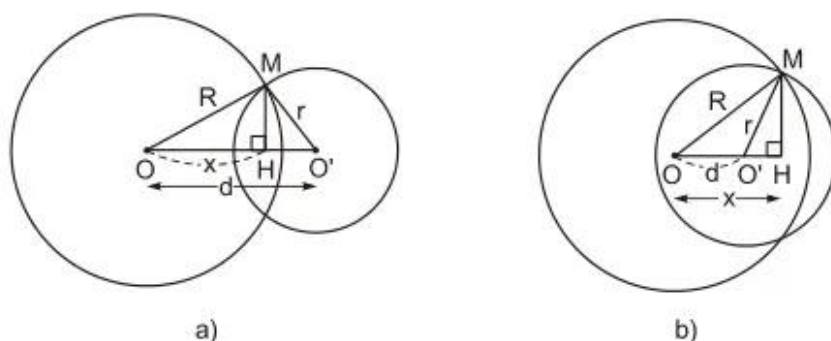
a) Trường hợp O trùng O' :

Nếu $R = r$ thì hai đường tròn trùng nhau.

Nếu $R \neq r$ thì hai đường tròn đồng tâm và không giao nhau.

b) Trường hợp O không trùng O'. Đặt $OO' = d > 0$. Giả sử $R \geq r$.

Ta tìm điều kiện để hai đường tròn có điểm chung. Gọi điểm chung (nếu có) của hai đường tròn là M. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến đường thẳng OO' (h.76).



Hình 76

Do $R \geq r$, tức là $OM \geq O'M$ nên $OH \geq O'H$, do đó H thuộc tia OO' . Ta sẽ tìm điều kiện để tồn tại điểm H.

Đặt $OH = x$ (điều kiện để tồn tại điểm H là $0 \leq x \leq R$). Ta có $O'H = d - x$ (h.76a) hoặc $O'H = x - d$ (h.76b). Trong cả hai trường hợp, ta đều có

$$O'H^2 = (d - x)^2.$$

Ta tính x theo R, r, d.

Xét các tam giác vuông OMH và O'MH, ta có :

$$MH^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - x^2,$$

$$MH^2 = O'M^2 - O'H^2 = r^2 - (d - x)^2.$$

Do đó
$$R^2 - x^2 = r^2 - (d - x)^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 - x^2 = r^2 - d^2 + 2dx - x^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = r^2 - d^2 + 2dx$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}.$$

Điều kiện $x \geq 0$ được thoả mãn vì $R^2 \geq r^2$ và $d > 0$.

Ta biến đổi tương đương điều kiện $x \leq R$ như sau :

$$\begin{aligned}
& x \leq R \\
\Leftrightarrow & \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} \leq R \\
\Leftrightarrow & d^2 + R^2 - 2dR \leq r^2 \\
\Leftrightarrow & (d - R)^2 \leq r^2 \\
\Leftrightarrow & |d - R| \leq r \\
\Leftrightarrow & -r \leq d - R \leq r \\
\Leftrightarrow & R - r \leq d \leq R + r.
\end{aligned}$$

Vậy :

Hai đường tròn không có điểm chung $\Leftrightarrow x > R \Leftrightarrow R - r > d$ hoặc $R + r < d$.

Hai đường tròn có duy nhất một điểm chung $\Leftrightarrow x = R \Leftrightarrow R - r = d$ hoặc $R + r = d$.

Hai đường tròn có hai điểm chung $\Leftrightarrow x < R \Leftrightarrow R - r < d < R + r$.

Chú ý. Ở lớp 7, ta đã chứng minh : Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, trong đó $a \geq b$ thì

$$a - b < c < a + b$$

và đã công nhận điều đảo lại : Nếu ba số a, b, c trong đó $a \geq b$ thoả mãn $a - b < c < a + b$ thì tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh bằng a, b, c.

Chứng minh điều đảo lại trên như sau : Vẽ hai đường tròn có bán kính a, b và có khoảng cách giữa hai tâm bằng c. Do $a - b < c < a + b$ nên hai đường tròn này cắt nhau. Vậy tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh bằng a, b, c.

2. Dựng tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn

a) Xét hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; r)$ với $R > r$ (h.77 ứng với trường hợp hai đường tròn ở ngoài nhau ; trong trường hợp hai đường tròn tiếp xúc ngoài hoặc cắt nhau, cách giải tương tự).

- Dựng tam giác vuông $OO'I$ có cạnh huyền OO' , cạnh góc vuông

$$OI = R - r.$$

- Tia OI cắt đường tròn $(O ; R)$ tại B.

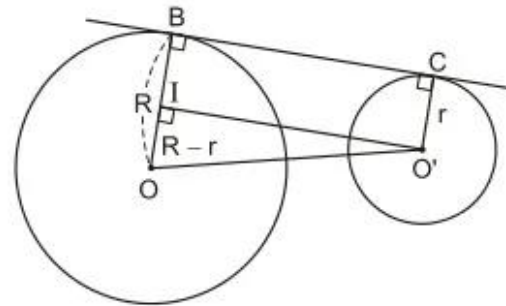
– Dụng bán kính $O'C$ song song với OB (B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ OO').

– Đường thẳng BC là tiếp tuyến cần dựng.

b) Xét hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; r)$ với $R = r$, ta dựng tiếp tuyến chung ngoài như sau :

– Dụng các bán kính OB và $O'C$ vuông góc với OO' (B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ OO').

– Đường thẳng BC là tiếp tuyến cần dựng.



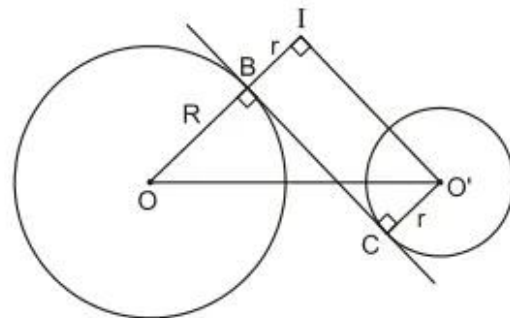
Hình 77

3. Dụng tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn

Dễ dàng dựng tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tiếp xúc ngoài. Sau đây ta nêu cách dựng tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; r)$ ở ngoài nhau (h.78) :

– Dụng tam giác vuông $OO'I$ có cạnh huyền OO' , cạnh góc vuông $OI = R + r$.

– Tia OI , cắt đường tròn $(O ; R)$ tại B .



Hình 78

– Dụng bán kính $O'C$ song song với OB (B và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ OO').

Đường thẳng BC là tiếp tuyến cần dựng.