§1 ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM (2 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

• *Hiểu rõ định nghĩa đạo hàm tại một điểm.* Biết cách tính đạo hàm tại một điểm bằng định nghĩa (theo quy tắc ba bước) của các hàm số thường gặp ($y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$).

• *Hiểu rõ rằng đạo hàm của một hàm số tại một điểm là một số xác định.* Các công thức kiểu

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$$
$$z' = (\sin x)' = \cos x$$

là sự tương ứng giữa mỗi số x và giá trị của đạo hàm tại đó. Nó giúp ta tránh lặp lại quá trình tính đạo hàm bằng định nghĩa tại các giá trị khác nhau của x.

• *Nắm vững ý nghĩa hình học của đạo hàm :* $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T tại $M_0(x_0\,; f(x_0))$ với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$.

Thuộc lòng và vận dụng tốt phương trình tiếp tuyến

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

của (C) tại tiếp điểm $M_0(x_0\,; y_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

• *Nắm vững ý nghĩa vật lí của đạo hàm :* $v = s'(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$.

• *Hiểu rõ mối quan hệ giữa tính liên tục và sự tồn tại đạo hàm.* Giáo viên chọn ví dụ để minh hoạ cho mối quan hệ trên.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Xây dựng khái niệm đạo hàm

• Qua hoạt động **1**, về mặt trực giác học sinh sẽ thấy vận tốc trung bình của đoàn tàu càng gần với "vận tốc" ở chính thời điểm t_0 nếu khoảng thời gian $|\Delta t|$ càng nhỏ. Điều đó dẫn đến định nghĩa vận tốc tức thời của một chuyển động tại t_0 là

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Khái niệm cường độ dòng điện tức thời cũng xuất hiện tương tự.

Có thể trình bày sự xuất hiện khái niệm đạo hàm như sau :

Vận tốc tức thời	**Cường độ dòng điện tức thời**	**Tốc độ phản ứng hoá học tức thời**
$v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$	$I(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$	$C(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

Đạo hàm
$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Kết quả của **1** là

$$v_{TB} = \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = t + t_0,$$

$t_0 = 3$; $t = 2$ (hoặc 2,5 ; 2,9 ; 2,99) $\Rightarrow$ $v_{TB} = 2 + 3 = 5$ (hoặc 5,5 ; 5,9 ; 5,99).

Nhận xét : t càng gần $t_0 = 3$ thì v_{TB} càng gần $2t_0 = 6$.

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Hoạt động **2** đòi hỏi tính đạo hàm của một hàm số cụ thể tại một điểm xác định bằng định nghĩa. Qua hoạt động này, học sinh có thể tự đề xuất các bước chứng minh trong quy tắc.

Ở đây nên gợi ý để học sinh làm quen với cách đặt $x = x_0 + \Delta x$. Từ đó

$$x \to x_0 \iff \Delta x \to 0.$$

Đó là cách biểu diễn biến x bởi một biểu thức chứa x_0 (là điểm cố định).

Có thể so sánh hai cách viết như sau :

Cách 1	Cách 2
Bước 1. Số gia đối số là $x - x_0$ thì số gia hàm số là $f(x) - f(x_0)$. *Bước 2*. Lập tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. *Bước 3*. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.	*Bước 1*. Đặt $x = x_0 + \Delta x \Leftrightarrow \Delta x = x - x_0$. Khi đó $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. *Bước 2*. Lập tỉ số $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. *Bước 3*. Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Trong trường hợp $x_0 = 0$, ta chọn cách viết thứ nhất. Khi đó, x đóng vai trò của số gia Δx và cách đó gọn hơn.

Kết quả của **2** là $y'(x_0) = 2x_0$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$.

Giải. Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$, ta có số gia tương ứng của hàm số là :

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{-\Delta x}{2(2 + \Delta x)}.$$

Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1}{2(2 + \Delta x)}$.

Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{2(2 + \Delta x)} = -\dfrac{1}{4}$.

Vậy $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Ta có thể dễ dàng chứng minh định lí sau đây.

Định lí

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì hàm số đó liên tục tại x_0.

Chứng minh. Ta có

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \,.\, 0 = 0,$$

suy ra $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Vậy hàm số liên tục tại x_0.

Từ định lí trên, ta có thể chứng minh được rằng nếu x_0 là điểm gián đoạn thì không tồn tại đạo hàm của hàm số tại điểm đó.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ x^3 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Giải. Vì
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1 = f(0),$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^3 = 0$$

nên
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x).$$

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 0$. Do đó, hàm số không có đạo hàm tại điểm đó.

Lưu ý. Ta có thể chứng minh tính gián đoạn của hàm số đã cho tại $x_0 = 0$ bằng cách khác dưới đây.

Chọn hai dãy

$$(x_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

$$(x'_n) : -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ..., -\frac{1}{n}, ...$$

Ta thấy $x_n \to 0$, $x'_n \to 0$. Tuy nhiên

$$\lim f(x_n) = \lim\left(\frac{1}{n^2} + 1\right) = 1,$$

$$\lim f(x'_n) = \lim\left(-\frac{1}{n^3}\right) = 0.$$

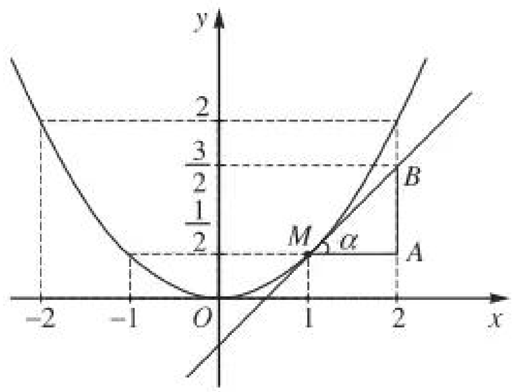
Điều đó chứng tỏ rằng đối với hàm số $y = f(x)$, giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ không tồn tại. Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = 0$.

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

• Hoạt động **3** tập cho học sinh biết cách vẽ một đường thẳng qua một điểm với hệ số góc cho trước, đồng thời cũng giới thiệu hình ảnh của một tiếp tuyến.

Ở đây nên hướng dẫn cách vẽ đường thẳng d qua một điểm M với hệ số góc k cho trước như sau :

Lấy hai điểm A, B sao cho $MA \parallel Ox$ và vectơ $\overrightarrow{MA}$ cùng hướng với Ox, tia MB hướng lên trên và tạo với tia MA một góc α có $\tan\alpha = k$ (h.21), MB là đường thẳng d phải dựng.



Hình 21

Trong **3**, vì $f(x) = \frac{x^2}{2}$ nên $f'(x) = x$ $\Rightarrow f'(1) = 1$. Vì $M\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$ nên ta lấy hai điểm A và B như sau : $A\left(2 ; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(2 ; \frac{3}{2}\right)$. Khi đó, ta có tam giác MAB vuông tại A (h.21).

Rõ ràng

$$\tan\alpha = \frac{AB}{MA} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}.$$

Muốn nói đến hệ số góc của tiếp tuyến, trước hết phải có khái niệm tiếp tuyến.

Rất khó đưa ra định nghĩa chính xác về tiếp tuyến nên ở đây, ta chỉ cung cấp cho học sinh khái niệm này bằng cách mô tả trực quan. Vì vậy, khác với SGK trước đây, ta chỉ đưa ra hình ảnh trực quan về tiếp tuyến với một đường cong mà không nêu thành định nghĩa.

Sau đó, ta chứng minh Định lí 2 để khẳng định rằng hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0\,;f(x_0))$ là $f'(x_0)$. Lưu ý rằng ở đây không được quên giả thiết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Kết quả của **4** : Phương trình đường thẳng đi qua $M_0(x_0\,;y_0)$ và có hệ số góc k là $y = k(x - x_0) + y_0$.

Kết quả của **5** : $y'(2) = -1$.

5. Đạo hàm trên một khoảng

Định nghĩa đạo hàm ở đầu chương chỉ là quy tắc tính đạo hàm của một hàm số tại một điểm giống như quy tắc tính sin (hay côsin) của một cung (góc). Đó là một số, không phải hàm số.

Nếu thực hiện ánh xạ :

$$\begin{aligned} f' : D_1 &\to \mathbb{R} \\ x_0 &\mapsto f'(x_0) \end{aligned}$$

trong đó $f'(x_0)$ được tính theo quy tắc trên thì đạo hàm là một hàm số ; D_1 là tập những điểm tại đó f có đạo hàm.

Trong hoạt động **6**, học sinh phải chứng minh rằng hàm số $y = x^2$ có đạo hàm tại điểm bất kì $x \in \mathbb{R}$. Từ đó chỉ cho học sinh thấy rằng hàm số

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

là đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên khoảng $(-\infty\,;+\infty)$.

b) Cũng làm tương tự với hàm số $g(x) = \dfrac{1}{x}$ tại điểm bất kì $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. BÀI TẬP

1. a) $f(2) - f(1) = 2^3 - 1^3 = 7$.

b) $f(0,9) - f(1) = \left(\frac{9}{10}\right)^3 - 1^3 = \frac{729}{1000} - 1 = -\frac{271}{1000} = -0,271$.

2. a) $\Delta y = 2\Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$.

b) $\Delta y = \Delta x(2x + \Delta x)$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

c) $\Delta y = 2\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2$.

d) $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

3. a) 3 ; b) $-\frac{1}{4}$; c) -2.

4. Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x)^2 = 0$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$. Từ đó suy ra hàm số đó không có đạo hàm tại $x = 0$.

• Ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$ và $f'(2) = 2$.

5. *Lưu ý :* Cần tính hệ số góc bằng định nghĩa.

a) $y = 3x + 2$; b) $y = 12x - 16$; c) $y = 3x + 2$ và $y = 3x - 2$.

6. a) $y = -4(x - 1)$; b) $y = -(x + 2)$; c) $y = -\frac{x}{4} + 1$ và $y = -\frac{x}{4} - 1$.

7. a) 49,49 m/s ; 49,245 m/s ; 49,005 m/s.

b) 49 m/s.

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

Về đạo hàm một bên

Ta có thể dễ dàng chứng minh sự không tồn tại đạo hàm tại một điểm nhờ khái niệm đạo hàm một bên và định lí sau :

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'(x_0^+) \\ \exists f'(x_0^-) \\ f'(x_0^+) = f'(x_0^-). \end{cases}$$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

liên tục tại $x_0 = 0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

Giải. Vì $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ cho nên hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Ta có

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1.$$

Vì $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ nên hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Lưu ý : Cũng có thể lập luận dựa trên định nghĩa đạo hàm và khái niệm giới hạn một bên.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Giải. Xét tỉ số

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x} = \frac{|x|}{x}.$$

Giới hạn bên phải của tỉ số trên là

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Giới hạn bên trái là

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

Các giới hạn một bên đều tồn tại nhưng khác nhau nên tỉ số

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

không có giới hạn khi $x \to 0$. Do đó, hàm số $f(x)=|x|$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Chú ý

a) Để phủ định sự tồn tại đạo hàm, ta chỉ cần phủ định một trong ba điều kiện đủ của định lí nêu trên. Chẳng hạn, hàm số

$$f(x)=(x-3)\sqrt[3]{x^2}$$

không có đạo hàm tại $x_0 = 0$ vì không có đạo hàm phải (trái) hữu hạn tại điểm đó.

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{(x-3)\sqrt[3]{x^2}}{x}=\mp\infty.$$

b) Chỉ dựa trên định nghĩa giới hạn, ta cũng có thể chứng minh sự không tồn tại đạo hàm.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x)=\frac{|x|}{x+1}$$

liên tục tại $x_0 = 0$, nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

Giải. Vì $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x+1}=f(0)$ nên $f(x)=\frac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Ta xét hai dãy

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ \frac{1}{n},\ \dots$$

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \dots,\ -\frac{1}{n},\ \dots$$

Cả hai dãy đều dần tới 0 khi $n \to +\infty$.

Nhưng khi đó

$$\lim \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 1\right)} = 1,$$

$$\lim \frac{f\left(-\frac{1}{n}\right) - f(0)}{-\frac{1}{n} - 0} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n} + 1\right)} = \lim \frac{1}{\frac{1}{n} - 1} = -1.$$

Vậy tỉ số

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

với $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$, không có giới hạn khi $x \to 0$, tức là hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.