§1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (5 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

– Biết khái niệm giới hạn của dãy số, chủ yếu thông qua các ví dụ và minh hoạ cụ thể. Biết định nghĩa giới hạn dãy số và vận dụng nó vào việc giải một số bài toán đơn giản liên quan đến giới hạn.

– Biết các định lí về giới hạn trình bày trong SGK và biết vận dụng chúng để tính giới hạn của các dãy số đơn giản.

– Biết khái niệm cấp số nhân lùi vô hạn và công thức tính tổng của nó. Biết nhận dạng các cấp số nhân lùi vô hạn và vận dụng công thức vào giải một số bài toán liên quan có dạng đơn giản.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Khái niệm giới hạn 0

Định nghĩa chính xác về khái niệm giới hạn hữu hạn của dãy số có thể được phát biểu như sau :

Số a được gọi là giới hạn của dãy số (u_n) nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, tồn tại số nguyên dương N sao cho với mọi $n > N$, ta đều có $|u_n - a| < \varepsilon$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ *hay* $u_n \to a$ *khi* $n \to +\infty$.

Tuy nhiên, như đã trình bày trong phần trước, SGK tránh dùng định nghĩa theo ngôn ngữ ε, N, mà đưa vào định nghĩa dưới dạng mô tả sau đây.

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ *hay* $u_n \to 0$ *khi* $n \to +\infty$.

Định nghĩa này được hình thành theo con đường quy nạp qua hoạt động **1**.

Mục đích của hoạt động này là làm cho học sinh hiểu một cách trực giác khái niệm giới hạn 0.

Trong hoạt động, cả ba mặt trực giác số, trực giác hình học và suy luận đều được đề cập nhằm hình thành ở học sinh hình ảnh ban đầu về khái niệm giới hạn 0 của dãy số. Tuy nhiên, mặt suy luận chỉ được đề cập có mức độ. Cụ thể, việc khẳng định $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, chỉ được yêu cầu với hai số dương cụ thể cho trước là 0,01 và 0,001 thông qua khái niệm khoảng cách. Tuân thủ quy định của chương trình, hoạt động **1** không yêu cầu giải quyết trường hợp tổng quát đối với số dương ε bất kì.

Tuy nhiên, muốn đi đến khái niệm giới hạn 0, học sinh lại cần hiểu được mệnh đề tổng quát : "$|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi". Để khắc phục mâu thuẫn này, ngay sau khi giải quyết xong câu b của hoạt động **1**, giáo viên nên khẳng định với học sinh rằng, ta có thể chứng minh được mệnh đề tổng quát, nhưng ở đây ta thừa nhận.

Việc trình bày hỗn hợp "trực giác – suy luận" như vậy cho phép đảm bảo được cả tính sư phạm và tính chặt chẽ toán học trong việc khẳng định tính chất cơ bản của dãy số đã cho.

Như vậy, nhiệm vụ chủ yếu của giáo viên trong hoạt động này là :

– Hướng dẫn học sinh giải quyết các vấn đề đã nêu trong hoạt động **1**.

– Sau khi các vấn đề đã được giải quyết, giáo viên nhấn mạnh đặc trưng "$|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi". Sau đó, thông báo rằng với đặc trưng này, (u_n) được gọi là có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực.

Sau khi hoàn thành hoạt động **1**, giáo viên có thể yêu cầu học sinh phát biểu định nghĩa khái niệm giới hạn 0 của dãy số và giúp học sinh chỉnh sửa lại phát biểu này để đi đến định nghĩa chính thức, hoặc đơn giản hơn là yêu cầu họ đọc định nghĩa trong SGK.

Tiếp xúc lần đầu với một khái niệm của Giải tích, gắn liền với tư tưởng vô hạn, chắc chắn học sinh sẽ gặp nhiều khó khăn. Do vậy, dãy số trong hoạt động **1** đã được chọn khá đơn giản.

Tuy nhiên, với dãy số này, học sinh có thể có quan niệm sai lệch rằng : Nếu dãy số (u_n) có giới hạn là 0, thì u_n phải là dãy đơn điệu và dần tới 0 chỉ từ một phía, thậm chí u_n phải dương.

Để khắc phục khiếm khuyết này và củng cố định nghĩa cũng như hình ảnh ban đầu về giới hạn 0, SGK đã trình bày thêm Ví dụ 1, trong đó dãy số được chọn là một dãy đan dấu $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$. Dãy số này vẫn được mô tả trên cả hai phương diện trực giác số và trực giác hình học.

Trước hết cần lưu ý rằng trong Ví dụ 1, vấn đề không phải là vận dụng định nghĩa để tìm giới hạn hay chứng minh một dãy số có giới hạn 0, mà là minh hoạ và giải thích cho định nghĩa. Do đó, cần thiết phải thừa nhận ngay từ đầu là "Người ta chứng minh được rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$". Chọn cách trình bày ví dụ như vậy cũng nhằm mục đích tránh ngôn ngữ ε, N.

Qua hoạt động **1** và Ví dụ 1, giáo viên cần lưu ý học sinh rằng (u_n) có thể là dãy không đơn điệu và có thể dần về 0 từ bên trái, hay từ bên phải, hoặc từ cả hai phía.

2. Giới hạn là số *a*

Khái niệm giới hạn *a* được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn 0 và theo con đường suy diễn (nghĩa là phát biểu ngay định nghĩa, sau đó trình bày ví dụ củng cố).

Có thể định nghĩa khái niệm giới hạn *a* như sau :

"*Ta nói dãy số* (v_n) *có giới hạn là số a khi n dần tới dương vô cực, nếu với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = a + u_n$, *trong đó* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$."

Định nghĩa này có ưu thế là nó định hướng một phương pháp tìm giới hạn của một số dãy số mà không bị hạn chế vào kiểu bài toán "Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a$". Chẳng hạn, để tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{n}$, ta làm như sau :

Vì $\dfrac{2n+1}{n} = 2 + \dfrac{1}{n}$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$.

Tuy nhiên, ta không nhấn mạnh việc sử dụng định nghĩa để tìm giới hạn. Do vậy, SGK chọn phương án đưa vào định nghĩa như sau :

"*Ta nói dãy số* (v_n) *có giới hạn là số a (hay* v_n *dần tới a) khi* $n \to +\infty$ *nếu* $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - a) = 0$."

Thuật ngữ "v_n *dần tới a*" được đưa vào nhằm thuận tiện cho việc định nghĩa một số khái niệm về giới hạn của hàm số.

Lưu ý : Kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ thể hiện khá đầy đủ mối quan hệ giữa các đối tượng có mặt trong định nghĩa, nhưng lại khá phức tạp về cách viết. Vả lại, khác với giới hạn hàm số, đối với giới hạn của dãy số, ta chỉ có duy nhất một trường hợp $n \to +\infty$. Vì thế, để đơn giản, ngay sau định nghĩa khái niệm giới hạn khác 0, ta quy ước viết tắt là $\lim u_n = a$.

Quy ước này được áp dụng cho cả trường hợp giới hạn $\pm\infty$.

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Với khái niệm này, nên dừng lại ở mức mô tả khái niệm như trong SGK là đủ, mà không cần trình bày một mục riêng với tiêu đề "Định nghĩa".

4. Giới hạn vô cực

Tiến trình đưa vào khái niệm "Giới hạn $+\infty$" tương tự như đối với khái niệm giới hạn 0, nghĩa là bằng con đường quy nạp. Qua hoạt động **2** cần nhấn mạnh tính chất đặc trưng của dãy số đã cho, đó là "u_n *có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi*". Chính vì thoả mãn tính chất này mà dãy số trên được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi n dần tới dương vô cực. Từ đó, yêu cầu học sinh phát biểu định nghĩa tổng quát, giúp các em chỉnh sửa phát biểu này để đi tới định nghĩa như trong SGK.

Câu hỏi b) trong hoạt động **2** có mục đích tạo ra ở học sinh một ấn tượng rằng u_n có thể lớn một cách tuỳ ý, vì ta thường có cảm giác khoảng cách từ Trái Đất tới Mặt Trăng thực sự rất lớn.

Đáp án của hoạt động ***2*** :

a) Khi n tăng lên vô hạn thì u_n cũng tăng lên vô hạn.

b) $n > 384.10^{10}$.

Tương tự trường hợp của giới hạn 0, cần lưu ý rằng trong Ví dụ 6, vấn đề không phải là vận dụng định nghĩa để tìm giới hạn hay chứng minh một dãy số có giới hạn $+\infty$, mà giải thích cho định nghĩa, nhất là giải thích cho thuộc tính *"lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi"*. Vì thế, SGK cũng thừa nhận ngay từ đầu là "người ta chứng minh được rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ".

Khái niệm "Giới hạn $-\infty$" có thể được đưa vào một cách tương tự như khái niệm "Giới hạn $+\infty$". Tuy nhiên để đơn giản và làm nổi rõ mối quan hệ giữa hai khái niệm này, SGK đã định nghĩa giới hạn $-\infty$ thông qua giới hạn $+\infty$.

5. Các định lí về giới hạn

Các giới hạn đặc biệt và các định lí về giới hạn được thừa nhận, không chứng minh. Do đó, không cần mất thời gian cho học sinh chép lại, mà nên tập trung vào việc phân tích đặc trưng của chúng. Đặc biệt là dành thời gian thích đáng cho việc trình bày các ví dụ và các bài tập áp dụng. Làm nhiều bài tập là cách tốt nhất để học sinh nắm được các định lí này.

Với Ví dụ 3 ngay sau Định lí 1, lần đầu tiên học sinh học vận dụng định lí. Do đó, nên trình bày lời giải chi tiết như trong SGK, để học sinh hiểu rằng thoạt tiên, ta chưa biết được các dãy số ứng với tử số và mẫu số có giới hạn hay không, nên chưa thể áp dụng được Định lí 1. Vì thế, ta tìm cách làm xuất hiện các dãy số có giới hạn mà ta đã biết trước đó. Đây chính là lí do chia tử số và mẫu số cho n^2. Việc kiểm tra sau đó xác nhận các dãy số ứng với tử số và mẫu số có giới hạn hữu hạn mới cho phép áp dụng định lí về giới hạn của một thương. Điều này giúp học sinh hiểu rõ hơn định lí và điều kiện áp dụng nó.

Tuy nhiên, trong Ví dụ 4, lời giải lại được trình bày rất vắn tắt với dụng ý đưa ra một quy ước rằng về sau chỉ cần ghi lời giải như vậy, mà không cần nêu các bước trung gian.

Có nhiều định lí thể hiện mối quan hệ giữa giới hạn hữu hạn là số a và giới hạn $\pm\infty$. Chúng là cơ sở cho việc tìm giới hạn của tích hay thương hai dãy số. Tuy nhiên, vì lí do giảm tải, những định lí này chỉ được trình bày đầy đủ hơn trong phần giới hạn của hàm số. Phần giới hạn dãy số chỉ đề cập ba trường hợp đơn giản (Định lí 2).

Nếu giới hạn $a < 0$, thì chuyển về trường hợp giới hạn hữu hạn là số dương và áp dụng tính chất $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

C. BÀI TẬP

1. Bài tập này không chỉ cho phép thể hiện ứng dụng thực tế của khái niệm giới hạn trong một môn học khác (Vật lí), mà còn có tác dụng củng cố khái niệm giới hạn của dãy số. Cụ thể là giúp học sinh hiểu rõ hơn ý tưởng "*nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi*". Vì thế, giáo viên nên dành thời gian thích đáng cho việc giải quyết bài tập này.

ĐS : a) $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{8}$; ...

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Các trường hợp khác có thể đưa về trường hợp b) hoặc c) của Định lí 2.

Ví dụ. Tính $\lim(-n^3 + 2n - 1)$.

Giải. Ta có

$$-n^3 + 2n - 1 = -n^3\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right).$$

Vì $\lim\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 1 > 0$ và $\lim(-n^3) = -\infty$ nên $\lim(-n^3 + 2n - 1) = -\infty$.

Lưu ý. Lời giải đầy đủ và chính xác phải trải qua ba bước :

• Nhận xét : $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{1}{8}$.

• Dự đoán $u_n = \frac{1}{2^n}$.

• Chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp.

Tuy nhiên, để tập trung vào mục tiêu chính mà bài toán nhằm đến, khi chữa bài tập này trên lớp, ta có thể thừa nhận kết quả dự đoán, nghĩa là bỏ qua bước chứng minh bằng quy nạp.

b) $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (theo tính chất $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$).

c) $\frac{1}{10^6}$ (g) $= \frac{1}{10^6}.\frac{1}{10^3}$ kg $= \frac{1}{10^9}$ (kg).

Vì $u_n \to 0$, nên $|u_n| = \frac{1}{2^n}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Như vậy, $|u_n|$ nhỏ hơn $\frac{1}{10^9}$ kể từ chu kì n_0 nào đó.

Nghĩa là sau một số năm ứng với chu kì này, khối lượng chất phóng xạ không còn độc hại đối với con người.

Chú ý. Về nguyên tắc, lời giải như trên đã hoàn chỉnh. Nhưng để học sinh hiểu rõ hơn, nên bổ sung vào lời giải trên nội dung sau :

Cụ thể, muốn $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^9}$, ta cần chọn n_0 sao cho $2^{n_0} > 10^9$.

Chẳng hạn, với $n_0 = 36$, thì $2^{36} = (2^4)^9 = 16^9 > 10^9$. Nói cách khác, sau chu kì thứ 36 (nghĩa là sau 36 . 24 000 = 864 000 (năm)), chúng ta không còn lo lắng về sự độc hại của khối lượng chất phóng xạ còn lại.

2. Vì $\lim\frac{1}{n^3} = 0$ nên $\left|\frac{1}{n^3}\right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Mặt khác, ta có $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3} = \left|\frac{1}{n^3}\right|$ với mọi n. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n - 1|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim(u_n - 1) = 0$. Do đó, $\lim u_n = 1$.

3. *ĐS :* a) 2 ; b) $\frac{3}{2}$; c) 5 ; d) $\frac{3}{4}$.

4. a) $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{4^2}$, $u_3 = \frac{1}{4^3}$, $u_n = \frac{1}{4^n}$; b) $\frac{1}{3}$.

5. $S = -\frac{10}{11}$.

6. $a = 1{,}020202... = 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{100^2} + ... + \frac{2}{100^n} + ... = 1 + \frac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{100}}$

$= 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{99}$ (vì $\frac{2}{100}$, $\frac{2}{100^2}$, ..., $\frac{2}{100^n}$, ... là một cấp số nhân lùi vô hạn, công bội $q = \frac{1}{100}$).

7. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $-\frac{1}{2}$; d) $+\infty$.

8. a) 2 ; b) 0.

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

Ta có thể định nghĩa khái niệm giới hạn $+\infty$ và $-\infty$ của dãy số một cách chính xác như sau :

• Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi n dần tới dương vô cực nếu với số dương M bất kì, luôn tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$u_n > M, \forall n > n_0.$$

Kí hiệu $\lim u_n = +\infty$.

• Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi n dần tới dương vô cực nếu với số dương M bất kì, luôn tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$u_n < -M, \forall n > n_0.$$

Kí hiệu $\lim u_n = -\infty$.