§1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC (5 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

• Nắm được định nghĩa hàm số sin và hàm số côsin, từ đó dẫn tới định nghĩa hàm số tang và hàm số côtang như là những hàm số xác định bởi công thức.

• Nắm được tính tuần hoàn và chu kì của các hàm số lượng giác sin, côsin, tang, côtang.

• Biết tập xác định, tập giá trị của bốn hàm số lượng giác đó, sự biến thiên và biết cách vẽ đồ thị của chúng.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – ĐỊNH NGHĨA

Về mặt lí thuyết, việc chuyển từ giá trị lượng giác của một cung (góc) lượng giác ở Đại số 10 sang hàm số lượng giác của đối số thực là một việc làm khá tế nhị. Mỗi cung lượng giác có một số đo với đơn vị là radian hoặc độ và mỗi cung này có các giá trị lượng giác sin, côsin, tang, côtang hoàn toàn xác định (dù cho số đo của chúng lấy theo đơn vị nào).

1. Hàm số sin và hàm số côsin

Vì như trên đã nói nên để trình bày hàm số sin và hàm số côsin, ta phải quay lại định nghĩa các hàm số này thông qua đường tròn lượng giác.

a) Hoạt động **1** nhằm giúp học sinh nhớ lại cách tính các giá trị lượng giác $\sin x$, $\cos x$ với x là các số thực (là số đo bằng radian của các cung lượng giác). Để làm câu a) của hoạt động này, học sinh có thể dùng máy tính bỏ túi đã được giới thiệu ở Đại số 10, hoặc dùng bảng các giá trị lượng giác của các góc và cung đặc biệt đối với các số như $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$.

Chú ý : Giáo viên có thể cho các giá trị x khác nhau tuỳ theo đối tượng học sinh của lớp mình. Câu b) của hoạt động **1** đòi hỏi học sinh phải làm hai việc : Việc thứ nhất là xác định (gần đúng) điểm mút M của cung $\overset{\frown}{AM}$ trên đường tròn lượng giác mà số đo $\overset{\frown}{AM}$ bằng x đã cho và việc thứ hai là chiếu vuông góc lên trục sin và trục côsin để xác định $\sin x$ và $\cos x$ tương ứng.

b) Từ hoạt động **1**, ta thiết lập quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $y = \sin x$ theo hai bước :

Bước thứ nhất. Đặt tương ứng mỗi số thực x với điểm M trên đường tròn lượng giác mà sđ$\overset{\frown}{AM} = x$ và xác định tung độ $\sin x$ của M trong Hình 1a.
Bước thứ hai. Biểu diễn giá trị của x trên trục hoành và giá trị của $\sin x$ trên trục tung trong Hình 1b (SGK).

Về phương pháp dạy học, cần lưu ý các đặc điểm sau :

– Sau bước thứ nhất, khi đã đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$ nghĩa là ta đã xác định được hàm số $y = \sin x$ rồi.

– Tuy nhiên, đối với học sinh ở các lớp dưới, ta đã hình thành thói quen là khi cho hàm số $y = f(x)$ thì x được biểu diễn trên trục hoành còn y biểu diễn trên trục tung. Do đó, SGK đã nêu thêm bước thứ hai.

Như vậy, ta đã nêu một cách chính xác định nghĩa hàm số sin, và tương tự là hàm số côsin, đồng thời nêu rõ tập xác định của chúng là $\mathbb{R}$, vì với bất kì số thực x nào, ta cũng xác định được giá trị $\sin x$ và $\cos x$ tương ứng.

Đối với hàm số côsin, việc chuyển từ Hình 2a sang Hình 2b (SGK) lại càng cần thiết vì trên đường tròn lượng giác thì $\cos x$ được biểu diễn trên trục hoành.

2. Hàm số tang và hàm số côtang

Đối với hàm số tang và hàm số côtang, ta cũng có thể xác định các quy tắc đặt tương ứng như đối với hàm số sin và hàm số côsin, tuy nhiên muốn vậy ta lại phải vẽ trục tang và trục côtang và dựa trên chúng mà lập quy tắc tương ứng. Việc làm này khá dài dòng và nhàm chán. Vì vậy, chúng tôi đã giới thiệu các hàm số này như những hàm số được xác định bởi công thức (là tỉ số của $\sin x$ và $\cos x$).

Cách trình bày này vừa ngắn gọn, lại làm nổi rõ được tập xác định của chúng (thoả mãn điều kiện $\cos x \neq 0$ đối với hàm $y = \tan x$ và điều kiện $\sin x \neq 0$ đối với hàm $y = \cot x$).

Hoạt động **2** sử dụng giá trị lượng giác của các cung đối nhau đã biết ở Đại số 10 nhằm cho học sinh nhận xét được hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn. Từ đó, căn cứ vào biểu thức của hàm số $y = \tan x$ và hàm $y = \cot x$, ta thấy chúng cũng là các hàm số lẻ.

II – TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Trước đây, trong các SGK về lượng giác thường trình bày khá đầy đủ về tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác, rồi đi tới những bài tập tìm chu kì của các hàm số lượng giác khác nhau. Trình bày như vậy rất nặng nề, hơn nữa mức độ trình bày chi tiết như vậy là không cần thiết đối với học sinh. Do đó, chúng tôi chọn giải pháp sử dụng hoạt động **3** để học sinh tự tìm tòi phát hiện ra tính tuần hoàn của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \tan x$ dựa trên những ví dụ mình tìm được. Từ đó, SGK dẫn tới khái niệm hàm số tuần hoàn một cách trực giác, còn việc trình bày có hệ thống đưa vào trong *Bài đọc thêm*.

III – SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Để phù hợp với việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sẽ trình bày ở lớp 12, đối với mỗi hàm số lượng giác, trước khi khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị, chúng tôi hệ thống lại các hiểu biết cơ bản về mỗi hàm số này, bao gồm :

- Tập xác định và tập giá trị ;
- Tính chẵn, lẻ ;
- Tính tuần hoàn.

Dựa vào các hiểu biết cơ bản này, ta có thể phân tích việc khảo sát sự biến thiên của hàm số lượng giác, chẳng hạn của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ thành việc khảo sát trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ rồi sử dụng tính tuần hoàn để tịnh tiến, còn việc khảo sát trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ có thể đưa về việc khảo sát trên đoạn $[0 ; \pi]$ rồi sử dụng tính lẻ của hàm số.

1. Hàm số $y = \sin x$

a) Khảo sát hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$

Vì ta đã định nghĩa hàm số sin dựa trên đường tròn lượng giác, ngoài ra không có kiến thức nào khác, nên một cách tự nhiên là sử dụng đường tròn lượng giác để khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \sin x$.

Tuy nhiên trên đường tròn lượng giác, đối số x biểu thị độ dài cung, còn toạ độ tương ứng trên trục tung biểu thị $y = \sin x$. Do đó, chúng tôi đã chuyển sang mặt phẳng toạ độ thông thường, trên đó trục tung biểu thị giá trị $\sin x$ như cũ, còn trục hoành biểu thị các giá trị của đối số x.

Chúng tôi gợi ý để giáo viên xem xét : Có thể làm đồ dùng dạy học là một cái thước trượt, kéo từ đường tròn lượng giác sang mặt phẳng toạ độ, giữ nguyên các tung độ $\sin x_1$, $\sin x_2$, còn các hoành độ x_1, x_2 thì căng độ dài các cung thành các đoạn thẳng Ox_1, Ox_2 trên trục hoành. Như vậy, ta sẽ được các giao điểm $M_1(x_1 ; \sin x_1)$, $M_2(x_2 ; \sin x_2)$, $M\left(\frac{\pi}{2} ; 1\right)$.

Chú ý : Ta có thể lấy các số x_3, x_4 bất kì thoả mãn $\frac{\pi}{2} \leq x_3 < x_4 \leq \pi$.

Tuy nhiên để cho đơn giản, chúng tôi đã lấy $x_3 = \pi - x_2$, $x_4 = \pi - x_1$. Lúc đó, hình vẽ sẽ sáng sủa hơn, tính đối xứng của đồ thị cũng được thiết lập do hệ thức $\sin x_3 = \sin(\pi - x_2) = \sin x_2, ...$

b) Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$

Sau khi đã có đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$, ta dựa vào tính chất của hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ để vẽ được đồ thị hàm số này trên đoạn $[-\pi ; 0]$. Từ đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi ; \pi]$, ta tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}_k(2k\pi ; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ để được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Để có cơ sở cho phép tịnh tiến này, trong Hình học 11 đã trình bày phép tịnh tiến ngay từ đầu năm học.

2. Hàm số $y = \cos x$

Đối với hàm số $y = \cos x$, ta không lặp lại quá trình xây dựng như đối với hàm số $y = \sin x$ (vả lại nếu muốn sử dụng đường tròn lượng giác cũng khó chuyển sang mặt phẳng toạ độ vì trục côsin là trục hoành chứ không phải trục tung như trục sin).

Sử dụng đẳng thức $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, ta có thể thu được ngay đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ theo vectơ $\vec{u}\left(-\frac{\pi}{2} ; 0\right)$.

Mặt khác bằng cách này, ta còn biết đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các đường cong có hình dạng giống nhau, gọi là *đường hình sin.*

Từ đồ thị của hàm số $y = \cos x$, ta rút ra nhận xét về chiều biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$.

Như vậy, dựa trên việc xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$, ta đã có thể thu gọn việc xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$.

3. Hàm số $y = \tan x$

Đối với hàm số $y = \tan x$, sau khi nêu một số tính chất cơ bản của hàm số này như đối với hai hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$, ta xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$. Sau đó sử dụng tính chất của hàm số lẻ để lấy đối xứng đồ thị vừa nhận được qua gốc toạ độ O, ta được đồ thị hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$.

Tiếp theo, sử dụng tính chất tuần hoàn với chu kì π, ta tịnh tiến đồ thị thu được theo các vectơ $\vec{v}_k(k\pi ; 0)$ để được đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên toàn miền xác định

$$\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Việc xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ dựa vào đường tròn lượng giác.

4. Hàm số $y = \cot x$

Chú ý : Dáng điệu của đồ thị tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$ không thể giải thích tường minh cho học sinh được (do chưa học đạo hàm, tiếp tuyến với đường cong), nhưng giáo viên nên lưu ý học sinh vẽ cho đúng, đồ thị phải có "độ dốc" 135° tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$ (hệ số góc của tiếp tuyến tại đó bằng -1).

C. BÀI TẬP

1. Căn cứ vào đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, ta thấy :

a) $\tan x = 0$ tại $x \in \{-\pi\,,0,\pi\}$.

b) $\tan x = 1$ tại $x \in \left\{-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$.

c) $\tan x > 0$ khi $x \in \left(-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right)$.

d) $\tan x < 0$ khi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}\,;\pi\right)$.

2. a) $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Vì $1 + \cos x \geq 0$ nên điều kiện là $1 - \cos x > 0$

hay $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Vậy

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) Điều kiện :

$$x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \Leftrightarrow\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \quad \right\}.$$

d) Điều kiện :

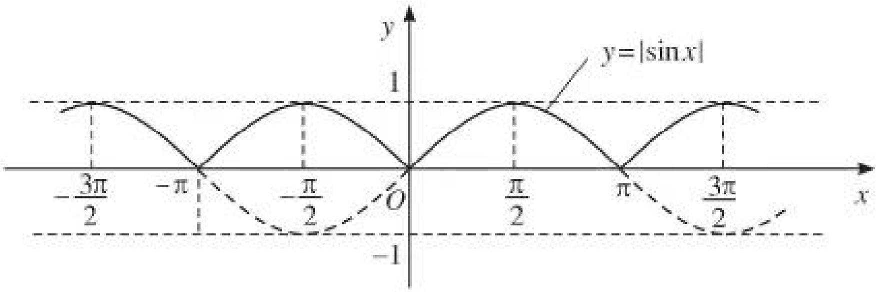
$$x + \frac{\pi}{6} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $$D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \quad \right\}.$$

3. Ta có

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \text{nếu } \sin x < 0. \end{cases}$$

Mà $\sin x < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi + k2\pi,\ 2\pi + k2\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ nên lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên các khoảng này, còn giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên các đoạn còn lại, ta được đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$ như sau (h.2):

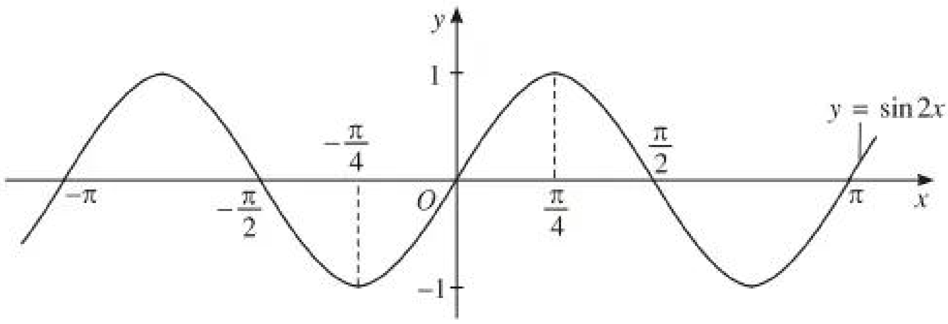


Hình 2

4. Ta có

$$\sin 2(x + k\pi) = \sin(2x + 2k\pi) = \sin 2x,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Từ đó, ta suy ra hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π. Hơn nữa, $y = \sin 2x$ là hàm số lẻ. Vì vậy, ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ rồi lấy đối xứng qua O, được đồ thị trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Cuối cùng tịnh tiến song song với trục Ox các đoạn có độ dài π, ta được đồ thị của hàm số $y = \sin 2x$ trên $\mathbb{R}$ (h.3).



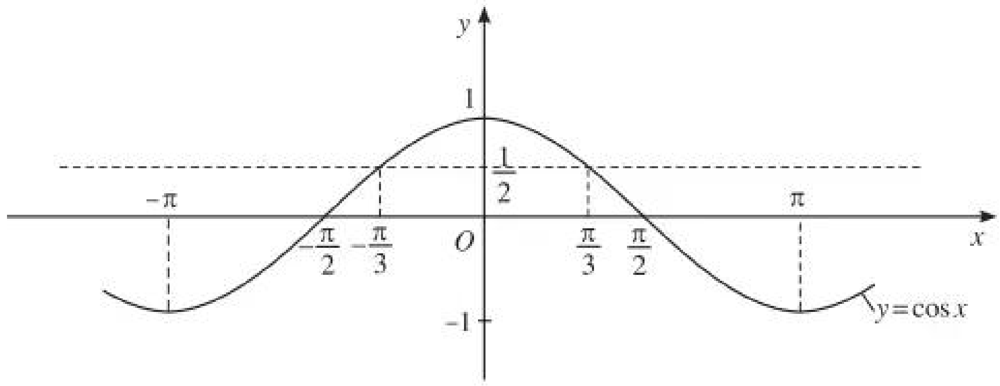
Hình 3

5. Cắt đồ thị hàm số $y = \cos x$ bởi đường thẳng $y = \frac{1}{2}$, ta được các giao điểm có hoành độ tương ứng là

$$\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ và } -\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ (h.4).}$$

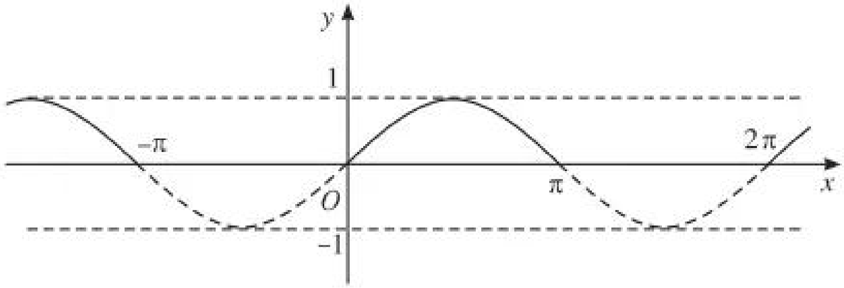
b) $\sin x \geq -1 \Leftrightarrow -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow 3 - 2\sin x \leq 5$ hay $y \leq 5$.

Vậy $\max y = 5 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$



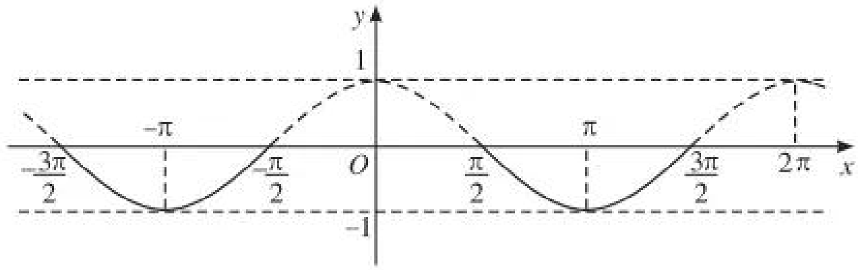
Hình 4

6. $\sin x > 0$ ứng với phần đồ thị nằm phía trên trục Ox. Vậy đó là các khoảng $(k2\pi, \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ (h.5).



Hình 5

7. $\cos x < 0$ ứng với phần đồ thị nằm phía dưới trục Ox. Đó là các khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\,;\, \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ (h.6).



Hình 6

8. a) Từ điều kiện $0 \le \cos x \le 1$ suy ra $2\sqrt{\cos x} \le 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\cos x} + 1 \le 3$ hay $y \le 3$.

Vậy $\max y = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.