

§1

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

(2 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Hiểu nội dung của phương pháp quy nạp toán học bao gồm hai bước (bắt buộc) theo một trình tự quy định.

Biết cách lựa chọn và sử dụng phương pháp quy nạp toán học để giải các bài toán một cách hợp lí.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

- Hoạt động §1 có mục đích dẫn dắt vào bài, gồm hai phần.

a) Với $n = 1, 2, 3, 4, 5$, kiểm tra tính đúng – sai của $P(n)$ và $Q(n)$, ta có $P(1), P(2), P(3), P(4)$ đúng, $P(5)$ là sai, còn $Q(1), Q(2), Q(3), Q(4), Q(5)$ đều đúng.

b) Câu hỏi nêu ra là một tình huống có vấn đề, vì vậy nên để học sinh trao đổi, thảo luận.

Cuối cùng trong phần kết luận, giáo viên cần làm rõ các ý sau :

– Phép thử với một vài trường hợp ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) không phải là chứng minh cho kết luận trong trường hợp tổng quát.

– Muốn chứng tỏ một kết luận là đúng, ta phải chứng minh nó đúng trong mọi trường hợp. Trở lại với việc xét $Q(n)$, nếu ta thử kiểm tra tiếp với một số giá trị của $n \geq 6$ thì mặc dù có $Q(n)$ là đúng, song ta vẫn chưa thể khẳng định được rằng $Q(n)$ là đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

– Muốn chứng tỏ một kết luận là sai, ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp sai là đủ. Ví dụ trong trường hợp trên thì $P(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ là sai vì khi $n = 5$, thì $P(5)$ là sai.

Giáo viên nên khai thác các tình huống nêu trên để dẫn dắt học sinh vào bài.

Lưu ý rằng, kiến thức ở phần này là mới và khó đối với nhiều học sinh nên giáo viên cần tổ chức tốt hoạt động ở đầu tiết học. Nếu giáo viên sử dụng hoạt động  1 (hoặc tương tự) để vào bài thì có thể trình bày dưới dạng bảng để so sánh các cặp số 3^n với $n + 100$ và 2^n với n khi n nhận các giá trị 1, 2, 3, 4, 5, ...

2. Trước khi giới thiệu về nội dung của phương pháp quy nạp toán học, cần làm cho học sinh thấy rõ rằng đối với các mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ thì việc thử với một số giá trị của n (cho dù làm được với một số lượng lớn) cũng không thể coi là chứng minh. Hơn nữa tập hợp \mathbb{N}^* là vô hạn nên việc thử với mọi số tự nhiên là một điều không thể làm được. Do vậy, phương pháp quy nạp toán học (gọi tắt là phương pháp quy nạp) sẽ là phương pháp hữu hiệu để giải quyết các bài toán loại này.

Khi trình bày phương pháp quy nạp, giáo viên cần đặc biệt lưu ý cho học sinh về tính bắt buộc của hai bước tiến hành, trong đó Bước 1 tuy đơn giản nhưng không thể bỏ qua, còn Bước 2 thực chất là nêu ra một bài toán mới

và tìm cách giải quyết. Bài toán nêu ra ở Bước 2 có giả thiết quy nạp là mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ và có kết luận là mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Từ kết quả của cả hai bước 1 và 2, ta mới kết luận được rằng mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Kinh nghiệm cho thấy rằng, khi giảng dạy về phương pháp quy nạp, cái khó nhất tập trung vào Bước 2 khi phải làm sáng tỏ đâu là giả thiết quy nạp và đâu là điều cần chứng minh, tức là phát biểu một bài toán mới.

3. Để tránh dài dòng, SGK đã không nêu ra nguyên lí quy nạp, song chính nội dung hai bước của phương pháp quy nạp đã thể hiện đầy đủ tinh thần của nguyên lí này. Có thể nêu ra đây nguyên lí quy nạp – một tiên đề cơ bản của số học các số tự nhiên.

Nếu một mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^$ là đúng với $n = p$, và từ giả thiết nó đúng với $n = k$ ($k \geq p$), ta suy được nó cũng đúng với $n = k + 1$, thì mệnh đề đó đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$.*

Khi $p = 1$, ta có kết quả đã trình bày trong SGK.

4. Cần chú ý rằng, phần lập luận ở cuối mục I hoàn toàn không phải là chứng minh, mà chỉ coi là một sự hình dung cho sự đơn giản và hiển nhiên được nêu trong nguyên lí quy nạp.

II – VÍ DỤ ÁP DỤNG

1. Phần này trình bày hai ví dụ áp dụng một cách khá chi tiết, trong đó cố gắng làm rõ cái khó mà học sinh thường gặp ở Bước 2. Giáo viên khi trình bày cần chú ý :
 - Làm rõ ý đồ của SGK thông qua hai ví dụ áp dụng, đó là minh họa cho các bước của phương pháp quy nạp đã nêu ở mục I. Tuy nhiên, không nhất thiết giáo viên phải tự trình bày toàn bộ, mà xen kẽ cho học sinh luyện tập và trả lời các câu hỏi.
 - Đặc biệt quan tâm đến việc tổ chức cho học sinh giải quyết Bước 2 bằng các câu hỏi. Chẳng hạn : Điều mà ta đã có (giả thiết quy nạp) là gì ? Điều mà ta phải chứng minh là gì ? Mệnh đề đúng với $n = k$ và $n = k + 1$ nghĩa là thế nào ? ...
 - Hoàn thành xong Bước 1 và Bước 2 thì phải nêu kết luận cuối cùng.

2. Về các hoạt động ở mục II

• Hoạt động **A2** khá đơn giản, dùng để luyện tập xen kẽ, chủ yếu là lặp lại các bước trong Ví dụ 1.

• Hoạt động **A3** nếu bài toán áp dụng phương pháp quy nạp ở một dạng khác. Học sinh phải dùng phép thử, sau đó dự đoán kết quả và cuối cùng là chứng minh điều dự đoán bằng phương pháp quy nạp. Có thể lập bảng để so sánh 3^n và $8n$.

n	3^n	?	$8n$
1	3	<	8
2	9	<	16
3	27	>	24
4	81	>	32
5	243	>	40

Bài toán được phát biểu là : "Chứng minh rằng $3^n > 8n$ với mọi $n \geq 3$ ".

Điều quan trọng là nhờ phép thử, ta tìm ra $n = 3$ là số nhỏ nhất sao cho $3^n > 8n$. Giáo viên nên quan tâm đến bài tập dạng này, vì nó có tác dụng thúc đẩy khả năng, thói quen tự tìm tòi, sáng tạo trong quá trình học tập.

III – MỤC "BẠN CÓ BIẾT ?"

Nhằm cung cấp cho học sinh kiến thức về phương pháp suy luận, trong đó phân biệt hai kiểu suy luận đó là suy diễn và quy nạp. Học sinh cần biết thêm rằng sự phân biệt rạch ròi giữa hai kiểu suy luận này trong quá trình giải toán cũng không phải là quá quan trọng vì suy diễn và quy nạp luôn liên hệ chặt chẽ, đan xen với nhau. Đúng như Ăng-ghen đã chỉ ra rằng : "Quy nạp và suy diễn gắn chặt với nhau như phân tích và tổng hợp". Nói riêng về quy nạp, học sinh cần thấy rõ rằng kết quả của phép quy nạp hoàn toàn bao giờ cũng đúng, còn kết quả của phép quy nạp không hoàn toàn chỉ có tính chất dự đoán, mang tính giả thuyết mà thôi, cho nên cần phải chứng minh hay bác bỏ. Trong Toán học và các ngành khoa học khác, phép quy nạp không hoàn toàn (cùng với phép tương tự) có một vai trò rất quan trọng trong nghiên cứu, tìm tòi và phát minh.

Nhiệm vụ của giáo viên là phải biết tận dụng và phát huy tác dụng của hai kiểu suy luận này cho phù hợp trong quá trình dạy Toán. Ngoài nội dung sơ lược đã nêu ở mục *Bạn có biết ?,* đối với giáo viên có thể quan tâm thêm một số điểm về suy luận ở mục *D. Kiến thức bổ sung*.

C. BÀI TẬP

- a) *Bước I* : Khi $n = 1$, vẽ trái chỉ có một số hạng là 2, vẽ phải bằng

$$\frac{1.(3.1+1)}{2} = 2.$$

Vậy hệ thức a) đúng.

Bước 2 : Đặt vé trái bằng S_n .

Giả sử đẳng thức a) đúng với $n = k \geq 1$, tức là :

$$S_k = 2 + 5 + 8 + \dots + 3k - 1 = \frac{k(3k+1)}{2} \text{ (giả thiết quy nạp).}$$

Ta phải chứng minh rằng a) cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh :

$$S_{k+1} = 2 + 5 + 8 + \dots + 3k - 1 + [3(k+1) - 1] = \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}.$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + 3k + 2 = \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 = \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} \\ &= \frac{3(k^2 + 2k + 1) + k + 1}{2} = \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Vậy hệ thức a) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Với $n = 1$, hệ thức đúng.

Đặt vé trái bằng S_n .

$$\text{Giả sử có } S_k = \frac{2^k - 1}{2^k} \text{ } (k \geq 1).$$

Ta phải chứng minh $S_{k+1} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$.

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Vậy hệ thức b) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Hệ thức c) đúng với $n = 1$. Đặt vé trái bằng S_n .

Giả sử đã có :

$$S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (k \geq 1).$$

Ta phải chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}.$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \cdot \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = (k+1) \cdot \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \\ &= \frac{(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Vậy hệ thức c) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Đặt $S_n = n^3 + 3n^2 + 5n$.

Với $n = 1$ thì $S_1 = 9 \vdots 3$.

Giả sử với $k \geq 1$ đã có $S_k = (k^3 + 3k^2 + 5k) \vdots 3$.

Ta phải chứng minh rằng $S_{k+1} \vdots 3$.

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy : } S_{k+1} &= (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 \\ &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3k^2 + 9k + 9 \end{aligned}$$

$$\text{hay } S_{k+1} = S_k + 3(k^2 + 3k + 3).$$

Theo giả thiết quy nạp thì $S_k \vdots 3$, ngoài ra $3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$ nên $S_{k+1} \vdots 3$.

Vậy $S_n \vdots 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- b) Đặt $S_n = 4^n + 15n - 1$.

Với $n = 1$, $S_1 = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18$ nên $S_1 \vdots 9$.

Giả sử với $k \geq 1$ thì $S_k = 4^k + 15k - 1$ chia hết cho 9.

Ta phải chứng minh $S_{k+1} \vdots 9$.

Thật vậy, ta có :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 \\ &= 4S_k - 9(5k - 2). \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp thì $S_k \vdots 9$ nên $4S_k \vdots 9$, mặt khác $9(5k - 2) \vdots 9$, nên $S_{k+1} \vdots 9$.

Vậy $S_n \vdots 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Đặt $A_n = n^3 + 11n$.

Với $n = 1$, ta có $A_1 = 1^3 + 11 = 12 \vdots 6$.

Giả sử với $n = k \geq 1$ đã có

$$A_k = (k^3 + 11k) \vdots 6.$$

Ta phải chứng minh $A_{k+1} \vdots 6$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 \\ &= (k^3 + 11k) + 3(k^2 + k + 4) = A_k + 3(k^2 + k + 4). \end{aligned}$$

Vì $A_k \vdots 6$ và $k^2 + k + 4 = k(k+1) + 4$ là số chẵn nên $A_{k+1} \vdots 6$.

Vậy $A_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Để thấy bất đẳng thức đúng với $n = 2$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$3^k > 3k + 1. \quad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với 3, ta được

$$3^{k+1} > 9k + 3 \Leftrightarrow 3^{k+1} > 3k + 4 + 6k - 1.$$

Vì $6k - 1 > 0$ nên

$$3^{k+1} > 3k + 4 \text{ hay } 3^{k+1} > 3(k + 1) + 1,$$

tức là bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy $3^n > 3n + 1$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

b) Với $n = 2$ thì vẽ trái bằng 8, vẽ phải bằng 7.

Vậy bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$2^{k+1} > 2k + 3. \quad (2)$$

Ta phải chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh :

$$2^{k+2} > 2(k + 1) + 3 \Leftrightarrow 2^{k+2} > 2k + 5.$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức (2) với 2, ta được :

$$2^{k+2} > 4k + 6 \Leftrightarrow 2^{k+2} > 2k + 5 + 2k + 1.$$

Vì $2k + 1 > 0$ nên $2^{k+2} > 2k + 5$.

Vậy $2^{n+1} > 2n + 3$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

4. a) Ta có :

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

b) Từ câu a) ta dự đoán

$$S_n = \frac{n}{n+1}. \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức (1) bằng phương pháp quy nạp.

Khi $n = 1$, $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. Vậy đẳng thức (1) đúng.

Giả sử đẳng thức (1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Ta phải chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}, \end{aligned}$$

tức là đẳng thức (1) cũng đúng với $n = k + 1$.

Vậy đẳng thức (1) đã được chứng minh.

5. Với $n = 4$, ta có tứ giác.

Thay $n = 4$ vào công thức, ta có số đường chéo của tứ giác theo công thức là

$$\frac{4(4-3)}{2} = 2.$$

Vì tứ giác có hai đường chéo nên công thức là đúng.

Vậy khẳng định là đúng với $n = 4$.

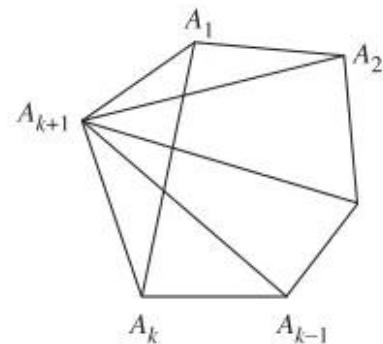
Giả sử đa giác lồi k cạnh ($k \geq 4$) có số đường chéo là $\frac{k(k-3)}{2}$ (giả thiết quy nạp).

Xét đa giác lồi $k + 1$ cạnh (h.12).

Ta phải chứng minh công thức đúng với $k + 1$, nghĩa là phải chứng minh đa giác lồi $k + 1$ cạnh có số đường chéo là

$$\frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}.$$

Nối A_1 và A_k , ta được đa giác k cạnh $A_1A_2\dots A_k$ có $\frac{k(k-3)}{2}$ đường chéo (giả thiết quy nạp).



Hình 12

Nối A_{k+1} với các đỉnh A_2, A_3, \dots, A_{k-1} , ta được thêm $k - 2$ đường chéo, ngoài ra A_1A_k cũng là một đường chéo.

Vậy số đường chéo của đa giác $k + 1$ cạnh là

$$\frac{k(k-3)}{2} + k - 2 + 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}.$$

Như vậy, khẳng định cũng đúng với đa giác $k + 1$ cạnh.

Vậy bài toán đã được chứng minh.

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

Suy luận là nhận thức hiện thực một cách gián tiếp. Đó là quá trình tư duy, xuất phát từ một hay nhiều điều đã biết để đi đến những phán đoán mới. Muốn suy luận đúng phải tuân theo những quy luật và quy tắc suy luận.

1. Các quy luật suy luận

a) *Quy luật phi mâu thuẫn* : Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

b) *Quy luật bài trung* : Một mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.

c) *Quy luật đảo phản* : Mệnh đề $A \Rightarrow B$ tương đương với mệnh đề $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

Ngoài ba quy luật phổ biến trên, tất nhiên các suy luận toán học phải tuân theo các quy luật của lôgic hình thức như : quy luật đồng nhất, quy luật phủ định của phủ định, quy luật có lí do đầy đủ, ...

2. Các quy tắc suy luận

a) *Suy luận suy diễn*

Thường được dùng nhiều nhất là tam đoạn luận, trong đó người ta phân biệt ba loại thông dụng sau.

Loại 1. Tam đoạn luận khẳng định, gồm ba bước :

Bước 1 (thường gọi là tiền đề lớn) : Nếu A thì B .

Bước 2 (thường gọi là tiền đề nhỏ) : Có A .

Bước 3 (thường gọi là kết luận) : Có B .

Sơ đồ tóm tắt : $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}$$

Loại 2. Tam đoạn luận phủ định

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \hline \overline{B} \\ \hline \overline{A} \end{array}$$

Loại 3. Tam đoạn luận có điều kiện

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ \hline A \Rightarrow C \end{array}$$

b) Suy luận quy nạp (hay còn gọi là phép quy nạp)

α) *Phép quy nạp hoàn toàn*

Phép quy nạp hoàn toàn là loại quy nạp, trong đó ta rút ra kết luận rằng tập hợp A có tính chất α trên cơ sở biết rằng thuộc tính α thuộc về tất cả các phần tử của tập hợp A .

Ví dụ 1. Từ phép thử với $n = 0, 1, 2, 3, 4$, ta thấy các số $2^{2^0} + 1 ; 2^{2^1} + 1 ; 2^{2^2} + 1 ; 2^{2^3} + 1 ; 2^{2^4} + 1$ đều là những số nguyên tố.

Từ đây có thể kết luận : "Với mọi số tự nhiên $n \leq 4$, các số dạng $2^{2^n} + 1$ đều là những số nguyên tố" hay

" $2^{2^0} + 1 ; 2^{2^1} + 1 ; 2^{2^2} + 1 ; 2^{2^3} + 1 ; 2^{2^4} + 1$ đều là những số nguyên tố".

Hoặc khi ta so sánh số đo của góc nội tiếp đường tròn với số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung, ta xét ba trường hợp :

- Tâm đường tròn nằm trên một cạnh của góc nội tiếp ;
- Tâm đường tròn nằm bên trong góc nội tiếp ;
- Tâm đường tròn nằm bên ngoài góc nội tiếp.

Kết quả nhận được là : Số đo của góc nội tiếp đều bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

Ngoài ba trường hợp trên, không còn khả năng nào khác.

Từ đây, ta có thể phát biểu thành định lí :

"Số đo của góc nội tiếp đường tròn bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung".

β) Phép quy nạp không hoàn toàn

Phép quy nạp không hoàn toàn là loại quy nạp trong đó ta rút ra khẳng định rằng tập hợp A có tính chất α trên cơ sở mới biết thuộc tính α thuộc về một số phần tử của tập hợp A mà thôi.

Ví dụ 2. Từ phép thử với $n = 0, 1, 2, 3, 4$, ta rút ra kết luận :

Với mọi số tự nhiên n thì $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố.

Kết luận trên có được nhờ phép quy nạp không hoàn toàn, và như ta đã biết, đó là kết luận sai.

Ví dụ 3. Từ nhận xét rằng :

$$512 : 4 \text{ và } 312 : 4,$$

ta kết luận : – Mọi số tận cùng bằng 2 đều chia hết cho 4. (sai)

– Mọi số tận cùng bằng 12 đều chia hết cho 4. (đúng).

Như vậy, từ các tiền đề đã cho, dùng phép quy nạp không hoàn toàn, ta có thể phát biểu thành các kết luận khác nhau (có cái đúng, có cái sai), tùy theo cách quan niệm về các tiền đề đã biết.

γ) Phương pháp quy nạp toán học

Trong trường hợp số phần tử của tập hợp đang xét là vô hạn, ta không thể dùng phép thử để kiểm tra phán đoán với mọi phần tử được (chẳng hạn các mệnh đề phụ thuộc số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$), nên cần sử dụng phương pháp quy nạp toán học như đã trình bày ở §1, Chương III.

Chú ý

- Như đã nêu ở trên, suy diễn và quy nạp là hai kiểu suy luận mà sự phân chia cũng chỉ mang tính tương đối vì sự đan xen và sự liên hệ mật thiết của chúng. Vì vậy, có tác giả đã xếp phép quy nạp hoàn toàn và phương pháp quy nạp toán học vào kiểu suy luận suy diễn. Trong SGV này, chúng tôi chọn một cách mà nhiều tác giả đã chọn, đó là xếp hai loại nêu trên vào phần suy luận quy nạp, chí ít cũng nhắc đến cụm từ "quy nạp". Ngoài ra, có lẽ để khỏi phải tranh luận, mong các bạn đồng nghiệp và độc giả nên quan tâm nhiều hơn đến nội hàm của các khái niệm.
- Ngoài ra, phép tương tự cũng là một dạng của suy luận quy nạp. Giống như phép quy nạp không hoàn toàn, kết luận rút ra cũng chỉ là dự đoán.

Trong Toán học, Vật lí, Sinh học, Hoá học, ..., vai trò của phép quy nạp rất lớn. Nói riêng, phép quy nạp không hoàn toàn (hoặc phép tương tự) cho phép ta mò mẫm, dự đoán, nêu các giả thuyết và tìm cách chứng minh. Nhiều công trình khoa học đã đi theo con đường như vậy.