§1 QUY TẮC ĐẾM (3 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Nắm được hai quy tắc đếm, biết áp dụng vào giải toán.

B. NỘI DUNG BÀI GIẢNG

I – QUY TẮC CỘNG

– Trong nhiều tài liệu, quy tắc cộng được trình bày dưới dạng mô tả như sau :

Nếu có m cách chọn đối tượng X, n cách chọn đối tượng Y và nếu mỗi cách chọn đối tượng X không trùng với bất kì cách chọn đối tượng Y nào thì có $m + n$ cách chọn đối tượng X hoặc Y.

Tuy nhiên thực chất của quy tắc vừa phát biểu là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp không giao nhau.

Ví dụ 1 nhằm dẫn đến quy tắc cộng.

Hoạt động **1** được tiến hành như sau :

Kí hiệu A, B lần lượt là tập hợp các quả cầu trắng, đen, ta có

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{7, 8, 9\}.$$

Khi đó, vì $n(A) = 6$, $n(B) = 3$, $A \cap B = \varnothing$ nên

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 6 + 3 = 9,$$

trong đó $A \cup B$ là tập hợp các quả cầu trắng và đen.

II – QUY TẮC NHÂN

Quy tắc nhân cũng là quy tắc cơ bản. Có thể chứng minh được nhưng ta thừa nhận.

Ví dụ 3 trong SGK nhằm dẫn đến quy tắc nhân nên khi giảng ví dụ này, giáo viên nên dùng sơ đồ hình cây để học sinh dễ hình dung.

Hoạt động **2** nhằm củng cố thêm ý tưởng về công thức nhân được nêu trong Ví dụ 3, được giải như sau :

Kí hiệu a, b, c là tên ba con đường từ A đến B ; 1, 2, 3, 4 là tên bốn con đường từ B đến C.

Khi đó, tập các cách đi từ A đến C qua B được mô tả như sau :

$$\begin{array}{llll} a1, & a2, & a3, & a4 \\ b1, & b2, & b3, & b4 \\ c1, & c2, & c3, & c4. \end{array}$$

Vậy có $3 . 4 = 12$ cách đi từ A qua B đến C.

C. BÀI TẬP

1. a) *Đáp số :* 4 số.

b) Số có hai chữ số như vậy có dạng $\overline{ab}$, trong đó $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$. Từ đó theo quy tắc nhân, ta có số các số cần tìm là

$$4 . 4 = 16 \text{ (số)}.$$

c) Số cần tìm có dạng $\overline{ab}$, trong đó $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{a\}$.

Từ đó, số các số cần tìm là

$$4 . 3 = 12 \text{ (số)}.$$

2. Các số thoả mãn đầu bài là các số có không quá hai chữ số, được thành lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Tương tự bài 1, ta có số các số cần tìm là

$$6 + 6^2 = 42 \text{ (số)}.$$

3. Bài này có nội dung tương tự như hoạt động **2**, nhưng đến đây ta đã có quy tắc nhân. Vì vậy, giáo viên hãy phân tích để vận dụng được quy tắc nhân.

a) Từ A đến B có 4 con đường, từ B đến C có 2 con đường, từ C đến D có 3 con đường.

Từ A muốn đi đến D bắt buộc phải đi qua B và C.

Vậy theo quy tắc nhân, số cách đi từ A đến D là

$$4 . 2 . 3 = 24 \text{ (cách)}.$$

b) Tương tự, ta có số cách đi từ A đến D rồi trở về A là

$$4 . 2 . 3 . 3 . 2 . 4 = 24^2 = 576 \text{ (cách)}.$$

4. Theo quy tắc nhân, số các cách chọn một chiếc đồng hồ là

$$3 . 4 = 12 \text{ (cách)}.$$

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

I - Quy tắc cộng mở rộng

1. Trường hợp các tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau

Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là n tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau. Khi đó

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_n). \qquad (1)$$

Công thức này được chứng minh bằng quy nạp.

2. Trường hợp các tập hợp hữu hạn có thể có cặp giao nhau khác rỗng

Công thức $\qquad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

được suy ra từ công thức cộng và được chứng minh như sau :

Ta có $A \cup B = A \cup B'$, trong đó $B' = B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$.

Vì $A \cap B' = \varnothing$ nên $n(A \cup B') = n(A) + n(B')$.

Mặt khác, do $B = (A \cap B) \cup B'$ và $(A \cap B) \cap B' = \varnothing$ nên

$$n(B) = n(A \cap B) + n(B').$$

Từ đó $n(A \cup B) = n(A \cup B') = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Trong trường hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ có thể có cặp giao nhau khác rỗng thì (1) *được suy rộng như sau :*

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)}, \qquad (2)$$

trong đó $$S_k^{(n)} = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n}^{n} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}).$$

Ví dụ. Năm cầu thủ được đánh số trên áo từ 1 đến 5 xếp thành một hàng dọc. Tính số các cách xếp mà ít nhất một cầu thủ có số áo trùng với số thứ tự của cầu thủ đó trong hàng.

Giải. Kí hiệu A_k là tập hợp các cách xếp hàng mà cầu thủ mang số k đứng ở hàng thứ k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$).

Tập hợp các cách xếp hàng mà có ít nhất một cầu thủ mang số áo trùng với số thứ tự trong hàng là

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5.$$

Vì có thể có $A_i \cup A_j \neq \varnothing$, $1 \le i, j \le 5$ nên theo (2), ta có

$$n(A) = \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1} S_k^{(5)}, \qquad (3)$$

trong đó

$$S_k^{(5)} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le 5}^{5} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}).$$

Ta phải tính các $S_k^{(5)}$ ($k = 1, 2, ..., 5$). Ta có

$$S_1^{(5)} = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5).$$

Nếu cầu thủ mang số 1 đứng đầu thì có 4! cách xếp bốn cầu thủ còn lại. Vậy

$$n(A_1) = 4!.$$

Tương tự, $$n(A_2) = ... = n(A_5) = 4!.$$

Do đó $$S_1^{(5)} = 5.\ 4! = 5!.$$

Vì $S_2^{(5)}$ có C_5^2 số hạng và $n(A_i \cap A_j) = 3!$ với $i < j$ nên

$$S_2^{(5)} = \sum_{1 \le i < j \le 5}^{n} n(A_i \cap A_j) = C_5^2.3! = \frac{5!}{3!2!}.3! = \frac{5!}{2!}.$$

Vì $S_3^{(5)}$ có C_5^3 số hạng và $n(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2!$ nếu $i < j < k$ nên

$$S_3^{(5)} = \sum_{1 \le i < j < k \le 5}^{5} n(A_i \cap A_j \cap A_k) = C_5^3.2! = \frac{5!}{3!}.$$

Do $S_4^{(5)}$ có C_5^4 số hạng và $n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = 1!$ nếu $i < j < k < l$ nên

$$S_4^{(5)} = \sum_{1 \le i < j < k < l \le 5}^{5} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = C_5^4.1! = 5.$$

Cuối cùng, hiển nhiên ta có

$$S_5^{(5)} = 1 = \frac{5!}{5!}.$$

Vậy theo (3) ta có

$$n(A) = 5! - \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} - \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{5!}$$

hay $$n(A) = 5!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\right) = 76.$$

II - Quy tắc nhân mở rộng

1. Quy tắc nhân mở rộng

Giả sử phải thực hiện r hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có n_1 kết quả, ứng với mỗi kết quả của hành động thứ nhất lại có n_2 kết quả của hành động thứ hai, ... ứng với mỗi kết quả của hành động thứ nhất, thứ hai, ..., thứ $r - 1$ lại có n_r kết quả của hành động thứ r. Khi đó, ta có $n_1.\ n_2 \ldots n_r$ kết quả của r hành động liên tiếp đó.

Quy tắc này được chứng minh bằng quy nạp.

2. Quy tắc tính số phần tử của tập tích Đề-các

Giả sử A và B là hai tập hữu hạn bất kì. Khi đó

$$n(A \times B) = n(A).n(B).$$

Ta có thể vận dụng quy tắc tính số phần tử của tập tích Đề-các vào Ví dụ 3.

Trong Ví dụ 3, nếu kí hiệu $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ thì tập hợp các bộ quần áo được mô tả bởi tập hợp $A \times B$.

Từ đó

$$n(A \times B) = n(A).n(\mathrm{B}) = 2 \,.\, 3 = 6.$$

Tổng quát :

Giả sử $A_1, A_2, ..., A_r$ *là các tập hợp hữu hạn. Khi đó*

$$n(A_1 \times A_2 \times ... \times A_r) = n(A_1).n(A_2) \dots . \, n(A_r).$$

Quy tắc nhân tổng quát hơn quy tắc tính số phần tử của tập tích Đề-các.

Chẳng hạn, trong bài toán tính số các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau, ta không biểu diễn được tập các số đó bằng một tích Đề-các mà phải biểu diễn tập đó bằng hợp của một số tích Đề-các.