§2 DÃY SỐ (2 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Biết khái niệm dãy số, cách cho dãy số, các tính chất tăng, giảm và bị chặn của dãy số.

Biết cách giải các bài tập về dãy số như tìm số hạng tổng quát, xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – ĐỊNH NGHĨA

1. Hoạt động **1** nhằm để học sinh ôn lại về hàm số, trong đó phải tính các giá trị của hàm số $f(n) = \dfrac{1}{2n-1}$ khi n nhận các giá trị 1, 2, 3, 4, 5.

Tập hợp các giá trị tương ứng của $f(n)$ được xếp theo đúng thứ tự của n trong tập $\mathbb{N}^*$: $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$.

Định nghĩa dãy số vô hạn nêu trong SGK thực chất là cách gọi tên cho một loại hàm số xác định trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}^*$.

2. Cần lưu ý học sinh rằng từ nay trở đi khi nói đến dãy số thì phải hiểu đây là dãy số vô hạn và trong trường hợp ngược lại thì phải nói rõ đó là dãy số hữu hạn.

Ngoài các ví dụ nêu trong SGK, giáo viên cần yêu cầu học sinh cho thêm các ví dụ khác để khắc sâu định nghĩa.

3. Để nói về dạng khai triển của dãy số, người ta đã chuyển từ kí hiệu $u = u(n)$ sang $u_n = u(n)$, thực chất là gắn cho giá trị $u(n)$ của dãy số một số n chỉ thứ tự và u_n là số hạng thứ n trong khai triển.

Như vậy, dạng khai triển $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ của dãy số chính là một tập hợp số thực được sắp xếp theo một thứ tự nhất định.

II – CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Hoạt động **2** để ôn lại các cách cho một hàm số. Vì dãy số cũng là hàm số nên tất nhiên cũng có bấy nhiêu cách cho dãy số.

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

Cách cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát là thông dụng và khá đơn giản vì nếu biết số hạng tổng quát $u_n = u(n)$ thì ta dễ dàng tìm ra mọi số hạng của dãy.

Từ ví dụ trong SGK, giáo viên có thể yêu cầu học sinh tìm thêm các số hạng của dãy số một cách tuỳ ý.

Hoạt động **3** nên coi là phần luyện tập xen kẽ (hoặc giáo viên chọn bài tập thích hợp).

Trong câu a) của hoạt động **3**, năm số hạng đầu của dãy nghịch đảo của các số tự nhiên lẻ là :

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}.$$

Từ đây dự đoán công thức $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$.

Tất nhiên, để khẳng định ta phải chứng minh bằng quy nạp.

Trong câu b) của hoạt động **3**, năm số hạng đầu của dãy các số tự nhiên chia cho 3 dư 1 là 1, 4, 7, 10, 13.

Từ đây, ta dự đoán công thức $u_n = 3n - 2$.

2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

Cũng giống như hàm số, không phải mọi dãy số đều có thể cho bởi công thức của số hạng tổng quát. SGK đã nêu một ví dụ về dãy số được cho bằng phương pháp mô tả, ngoài ra có thể giới thiệu thêm các ví dụ khác.

Ví dụ : a) Dãy các số nguyên tố.

b) Dãy các giá trị gần đúng thiếu của $\sqrt{2}$ với sai số tuyệt đối $\dfrac{1}{10^n}$.

3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi (hay còn gọi là công thức quy nạp)

Đây cũng là một cách thông dụng để cho dãy số, trong đó cho phép tính được u_n thông qua các số hạng trước nó. Công thức của nó thường gặp là

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} u_1 = a \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ với } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{hoặc } (\mathrm{II})\ \begin{cases} u_1 = a\ ;\ u_2 = b. \\ u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}) \text{ với } n \geq 3. \end{cases}$$

Trước khi nêu ví dụ trong SGK, giáo viên nên cho ví dụ dạng (I) và (II) đơn giản, sau đó có thể cho học sinh tự tìm những dãy số theo kiểu này.

Dãy số Phi-bô-na-xi là một dãy số khá đặc biệt, việc thực hiện hoạt động **4** là không có gì khó khăn. Nên khuyến khích học sinh đọc mục *Bạn có biết ?* ở cuối bài và giới thiệu cho học sinh các tài liệu về dãy số Phi-bô-na-xi nếu có điều kiện.

Chú ý rằng, cách cho dãy số bằng công thức truy hồi có tính "kiến thiết", nghĩa là để tính được số hạng có chỉ số cho trước, ta phải tính lần lượt tất cả các số hạng đứng trước đó.

III – BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA DÃY SỐ

SGK giới thiệu hai cách biểu diễn dãy số trên mặt phẳng toạ độ và trên trục số.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = u(n)$.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, dãy số (u_n) được biểu diễn bởi các điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = u(x)$ có hoành độ nguyên dương.

Trên trục số $x'Ox$, dãy số (u_n) được biểu diễn bởi các điểm có toạ độ $x = u(n)$.

Ngoài hai cách nêu trên, ta còn có thể dùng cách sau đây để biểu diễn một dãy số cả trên trục tung và trục hoành.

Giả sử dãy số (u_n) được cho bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ với } n \geq 1, \end{cases}$$

trong đó $f(u_n)$ là biểu thức đối với u_n.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường cong (C) của hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d : y = x$.

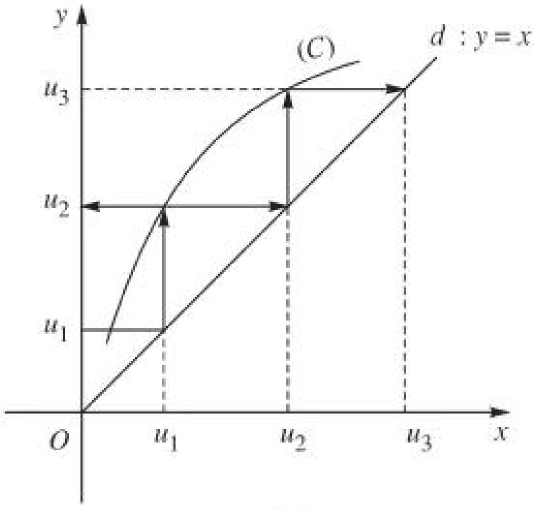
Đặt u_1 trên trục hoành và trục tung.

Vì $u_2 = f(u_1)$ nên u_2 là tung độ của điểm thuộc (C) có hoành độ u_1 (h.13)

Từ điểm u_2 trên Oy dùng đường thẳng d để có điểm u_2 thuộc Ox.

Từ u_2 thuộc Ox dùng đường cong (C) để có u_3 thuộc Oy.

Và từ u_3 thuộc Oy, dùng đường thẳng d để có u_3 thuộc Ox ...



Hình 13

IV – DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

• Hoạt động **5** giúp cho học sinh chuẩn bị tiếp thu định nghĩa ở phần đầu.

Để hoàn thành được hoạt động này, học sinh cần nhớ lại cách chứng minh bất đẳng thức bằng định nghĩa đã học ở lớp 10 :

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$$

b) Thật vậy, xét các hiệu :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \text{ vì } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ ;$$

$$v_{n+1} - v_n = [5(n+1) - 1] - (5n - 1) = 5 > 0.$$

• Sau khi nêu định nghĩa trong SGK, có thể cho học sinh so sánh với định nghĩa hàm số đồng biến (hay tăng) và hàm số nghịch biến (hay giảm) học ở lớp 10. Đặc biệt thấy được sự đơn giản trong định nghĩa đối với dãy số, do mỗi số hạng của nó được gắn với một số chỉ thứ tự.

• Cũng cần nói thêm rằng, nếu dãy số được cho bởi công thức $u_n = f(n)$ thì sự tăng hay giảm của dãy số tuỳ thuộc vào hàm số f tăng hay giảm trên tập xác định $[1 \ ; +\infty)$.

• SGK đã nêu ra hai phương pháp để xét tính tăng, giảm của dãy số thông qua hai ví dụ.

Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu : $H = u_{n+1} - u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Nếu $H > 0$ thì dãy số tăng.

Nếu $H < 0$ thì dãy số giảm.

Phương pháp 2. Nếu $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì lập tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ rồi so sánh với 1.

Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số giảm. Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số tăng.

2. Dãy số bị chặn

* Hoạt động **6** yêu cầu học sinh chứng minh hai bất đẳng thức khá đơn giản.

Xét hiệu $\dfrac{n^2+1}{2n} - 1 = \dfrac{(n-1)^2}{2n} \geq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, suy ra điều phải chứng minh.

Có thể suy ra $\dfrac{n}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ trực tiếp từ chứng minh trên.

Mục đích của hoạt động này là thông qua hai dạng bất đẳng thức ($\geq$) và ($\leq$) để giới thiệu định nghĩa dãy số bị chặn trên hoặc bị chặn dưới.

Khi dạy về định nghĩa, cần nêu rõ dấu bằng (=) không nhất thiết phải xảy ra, nghĩa là không yêu cầu tồn tại u_n bằng m (hoặc M).

Sau khi giới thiệu định nghĩa, nên dùng ví dụ của SGK cho học sinh luyện tập.

C. BÀI TẬP

1. Đây là bài tập dễ, tuy nhiên có thể nêu thêm yêu cầu để học sinh dự đoán về tính tăng, giảm.

2. a) $-1, 2, 5, 8, 11$.

b) Chứng minh $u_n = 3n - 4$ bằng phương pháp quy nạp :

Với $n = 1$ thì $u_1 = -1 = 3.1 - 4$ đúng.

Giả sử đã có $u_k = 3k - 4$ với $k \geq 1$.

Theo công thức của dãy số và giả thiết quy nạp, ta có

$$u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 4 + 3 = 3(k+1) - 4.$$

Vậy công thức đã được chứng minh.

3. a) $3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}.$

b) Viết $3 = \sqrt{9}$ và nhận xét

$\sqrt{9} = \sqrt{1+8}$

$\sqrt{10} = \sqrt{2+8}$

$\sqrt{11} = \sqrt{3+8}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4+8}$

...

Dự đoán $\qquad u_n = \sqrt{n+8}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. (1)

Chứng minh công thức (1) bằng quy nạp :

• Với $n = 1$, rõ ràng công thức (1) là đúng.

• Giả sử đã có $u_k = \sqrt{k+8}$ với $k \geq 1$.

Theo công thức dãy số có

$$u_{k+1} = \sqrt{1 + u_k^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{k+8})^2} = \sqrt{(k+1)+8}.$$

Như vậy công thức (1) đúng với $n = k + 1$.

Do đó, công thức (1) đã được chứng minh.

4. a) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - 2 - \left(\dfrac{1}{n} - 2\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}.$

Vì $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ nên $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

b) Xét hiệu

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-1}{n+1+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1}$$

$$= \frac{n^2 + n - n^2 - n + 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Vậy $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ hay dãy số đã cho là dãy số tăng.

c) Các số hạng đan dấu vì có thừa số $(-1)^n$, nên dãy số không tăng và cũng không giảm.

d) Làm tương tự như câu a) và b) hoặc lập tỉ số (vì $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5n+2}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{5n+7} = \frac{10n^2+19n+6}{10n^2+19n+7}$$

rồi so sánh với 1.

Đáp số : Dãy số giảm.

5. a) Dãy số bị chặn dưới vì $u_n = 2n^2 - 1 \geq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và không bị chặn trên vì khi n lớn vô cùng thì $2n^2 - 1$ cũng lớn vô cùng.

b) Dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác, vì $n \geq 1$ nên $n^2 \geq 1$ và $2n \geq 2$.

Do đó $n(n+2) = n^2 + 2n \geq 3$, suy ra

$$\frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{3}.$$

Vậy dãy số bị chặn vì $0 < u_n \leq \frac{1}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Vì $n \geq 1$ nên $2n^2 - 1 > 0$, suy ra $\frac{1}{2n^2-1} > 0$.

Vì $n^2 \geq 1$ nên $2n^2 > 2$ hay $2n^2 - 1 \geq 1$, suy ra

$$u_n = \frac{1}{2n^2-1} \leq 1.$$

Vậy $0 < u_n \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, tức là dãy số (u_n) bị chặn.

d) Dãy số bị chặn vì

$$-\sqrt{2} < \sin n + \cos n < \sqrt{2}\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(Chú ý rằng, theo kết quả của lượng giác thì

$$-\sqrt{2} \leq \sin n + \cos n \leq \sqrt{2}\ \ \forall n,$$

tuy nhiên dấu bằng không thể xảy ra do $n \in \mathbb{N}^*$).