§2 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ (5 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

– Biết khái niệm giới hạn của hàm số và định nghĩa của nó. Biết vận dụng định nghĩa vào việc giải một số bài toán đơn giản về giới hạn của hàm số.

– Biết các định lí về giới hạn của hàm số và biết vận dụng chúng vào việc tính các giới hạn dạng đơn giản.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Đặt vấn đề vào bài học

Giáo viên có thể khai thác hình vẽ ngay dưới §2 để đặt vấn đề vào bài học, bằng cách làm rõ mục tiêu tổng quát mà bài học nhằm tới, đó là nghiên cứu mối quan hệ giữa sự biến thiên của đối số và biến thiên của các giá trị tương ứng của hàm số. Cụ thể, nghiên cứu xem nếu biến số x lấy những giá trị lập thành một dãy số dần tới a (hay $\pm\infty$) thì dãy số tương ứng của hàm số $y = f(x)$ thay đổi ra sao. Nói cách khác, khi x dần tới a (hay $\pm\infty$) thì $f(x)$ thay đổi như thế nào ?

2. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Có thể định nghĩa khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm độc lập với khái niệm giới hạn của dãy số thông qua ngôn ngữ ε, δ như sau :

Cho khoảng K, $x_0 \in K$ *và hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên K (hoặc* $K \setminus \{x_0\}$*).*

Số L được gọi là giới hạn của hàm số $y = f(x)$ *khi x dần tới* x_0 *nếu với mọi* $\varepsilon > 0$*, tồn tại số* $\delta > 0$ *sao cho* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *với mọi* $x \in K \setminus \{x_0\}$ *và* $|x - x_0| < \delta$*.*

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *hay* $f(x) \to L$ *khi* $x \to x_0$*.*

Tuy nhiên, vì lí do sư phạm, để tránh khó khăn cho học sinh, chương trình yêu cầu trình bày giới hạn hàm số thông qua giới hạn dãy số. Từ đó, định nghĩa trong SGK là :

Cho khoảng K chứa điểm x_0 *và hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên K hoặc trên* $K \setminus \{x_0\}$*.*

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *hay* $f(x) \to L$ *khi* $x \to x_0$.

Định nghĩa này tương đương với định nghĩa theo ngôn ngữ ε, δ đã nêu ở trên.

Tổng quát hơn, trong cả hai định nghĩa có thể giả thiết rằng hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số X và x_0 là một điểm giới hạn của X. Nhưng đối với bậc phổ thông, ta chỉ hạn chế cho trường hợp X là một khoảng.

Hơn nữa, cần lưu ý học sinh rằng giả thiết "*hàm số xác định trên khoảng K*" không có nghĩa K là tập xác định của nó, mà thông thường K có thể chỉ là một tập con của tập xác định. Tương tự, nếu nói "hàm số $y = f(x)$ xác định trên $K \setminus \{x_0\}$" thì phải hiểu rằng nó có thể xác định tại x_0 hoặc không xác định tại điểm này.

Nói cách khác, trong định nghĩa chỉ cần giả thiết "*Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $K \setminus \{x_0\}$*" là đủ. Tuy nhiên vì lí do sư phạm và tránh cho học sinh hiểu nhầm rằng theo giả thiết hàm số $y = f(x)$ không xác định tại x_0, SGK đã cho giả thiết như trong định nghĩa nêu trên.

Khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm được đưa vào theo con đường quy nạp, thông qua hoạt động **1**.

Sau khi giải quyết xong câu 2 trong hoạt động **1**, giáo viên cần thông báo khái niệm có liên quan (nhưng không nêu định nghĩa) mà yêu cầu học sinh thảo luận để phát hiện thuộc tính bản chất của khái niệm này và trình bày một phác thảo của định nghĩa tổng quát.

Để tiện lợi về sau, trong Định nghĩa 1 ta giả thiết hàm số xác định trên khoảng K, chứ không phải $(a\,;\,b)$.

Thực ra, có thể xem $(a\,;\,b)$ như là một khoảng tuỳ ý, nghĩa là xem a và b như các số thực hay $\pm\infty$. Nhưng để tránh nhầm lẫn cho học sinh khi áp dụng các định lí về giới hạn, ta ngầm quy ước viết a, b hay L khi chúng hữu hạn.

Tuy nhiên, việc nói khoảng K có thể gây mơ hồ cho học sinh. Vì thế, trước hoặc sau khi định nghĩa, giáo viên nên lưu ý học sinh rằng K có thể có các dạng như đã nêu trong SGK.

Sau hoạt động **1** và Ví dụ 1 cần lưu ý học sinh rằng hàm số có thể không xác định tại x_0 nhưng lại có thể có giới hạn tại điểm này. Từ đó, giải thích lí do vì sao trong định nghĩa lại cho giả thiết hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

3. Về giới hạn một bên

Trong Ví dụ 4, với mục đích giảm tải, SGK không chọn bài toán biện luận theo tham số. Dù rằng bài toán tham số là bài toán tổng quát của bài toán trong hoạt động **2**, nhưng lại gây khó khăn cho học sinh (nhất là đối tượng trung bình và yếu).

Kết quả của **2** là thay số 2 bằng số -7.

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Kết quả **3** là : khi x dần tới dương vô cực thì $f(x)$ dần tới 0 ; Khi x dần tới âm vô cực thì $f(x)$ dần tới 0.

Do cách định nghĩa khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại $\pm\infty$ tương tự với các định nghĩa giới hạn của hàm số đã biết trước đó (định nghĩa qua giới hạn của dãy số) và do hạn chế về thời gian, nên SGK chỉ đưa vào một hoạt động dưới dạng quan sát đồ thị đơn giản. Sau đó trình bày ngay định nghĩa.

Trên phương diện khoa học, nếu không dùng dãy số thì có thể định nghĩa khái niệm trên như sau :

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;+\infty)$.

Số L được gọi là giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi x dần tới dương vô cực nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $M > 0$ sao cho $|f(x) - L| < \varepsilon$ với mọi $x > M$, $x \in (a\ ;+\infty)$.

5. Giới hạn vô cực của hàm số

Tương tự như đối với dãy số, SGK tính đến cả hai trường hợp : giới hạn hữu hạn mà ta thường kí hiệu là L và giới hạn vô cực ($+\infty$ hay $-\infty$).

Đối với giới hạn $\pm\infty$, nếu trình bày đầy đủ, ta phải nêu mười định nghĩa sau đây, tương ứng lần lượt với $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

• *Cho khoảng K chứa điểm* x_0 *và hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên K hoặc trên* $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ *có giới hạn là* $+\infty$ *khi x dần tới* x_0 *nếu với dãy số* (x_n) *bất kì,* $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ *và* $x_n \to x_0$, *ta có* $f(x_n) \to +\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *hay* $f(x) \to +\infty$ *khi* $x \to x_0$.

• *Cho khoảng K chứa điểm* x_0 *và hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên K hoặc trên* $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ *có giới hạn là* $-\infty$ *khi x dần tới* x_0 *nếu với dãy số* (x_n) *bất kì,* $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ *và* $x_n \to x_0$, *ta có* $f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *hay* $f(x) \to -\infty$ *khi* $x \to x_0$.

• *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* $(x_0 ; b)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ *có giới hạn bên phải là* $+\infty$ *khi x dần tới* x_0 *nếu với dãy số* (x_n) *bất kì,* $x_0 < x_n < b$ *và* $x_n \to x_0$, *ta có* $f(x_n) \to +\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

• *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* $(x_0 ; b)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ *có giới hạn bên phải là* $-\infty$ *khi x dần tới* x_0 *nếu với dãy số* (x_n) *bất kì,* $x_0 < x_n < b$ *và* $x_n \to x_0$, *ta có* $f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

• *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* $(a ; x_0)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ *có giới hạn bên trái là* $+\infty$ *khi x dần tới* x_0 *nếu với dãy số* (x_n) *bất kì,* $a < x_n < x_0$ *và* $x_n \to x_0$, *ta có* $f(x_n) \to +\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

• *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ x_0)$.*

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bên trái là $-\infty$ khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$

• *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ +\infty)$.*

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to +\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

• *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ +\infty)$.*

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi x dần tới dương vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$

• *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty\ ;\ b)$.*

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần tới âm vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < b$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to +\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$

• *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty\ ;\ b)$.*

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi x dần tới âm vô cực nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < b$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$

Tuy nhiên, vì lí do thời gian và tránh phức tạp hoá vấn đề, ta không nêu hết tất cả 10 định nghĩa trên mà chỉ trình bày một trường hợp đại diện, đó là Định nghĩa 4. Giáo viên có thể yêu cầu học sinh phát biểu định nghĩa cho một vài trường hợp khác.

Tương tự, có nhiều định lí thể hiện mối liên hệ giữa giới hạn hữu hạn L và giới hạn $\pm\infty$, hoặc giữa các giới hạn $\pm\infty$. Tuy nhiên, SGK không trình bày hết tất cả các định lí này, mà chỉ giới thiệu một số quy tắc cần thiết nhất cho việc dạy học giải tích ở lớp 12. Thực chất đó là các định lí, nhưng để tránh phát biểu rườm rà, chúng được trình bày dưới dạng các bảng quy tắc. Các quy tắc này cũng chỉ được trình bày với một trường hợp đại diện $x \to x_0$.

Không nên yêu cầu học sinh chép lại các bảng quy tắc này, mà tập trung vào việc sử dụng các kết quả trong bảng để giải quyết các ví dụ và giải các bài toán liên quan.

Về quy tắc tìm giới hạn của thương hai hàm số khi $x \to x_0$, giả thiết chính xác phải là $g(x) > 0$ (hay $g(x) < 0$) với mọi x trong một lân cận nào đó của điểm x_0. Còn nói "*dấu của g(x) xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với* $x \neq x_0$" là không chính xác. Nhưng vì lí do sư phạm, SGK không trình bày chặt chẽ giả thiết này. Giáo viên không nên đi sâu vào những khía cạnh phức tạp của nó mà chỉ cần giải thích thông qua các ví dụ cụ thể. Chẳng hạn qua Ví dụ 8.

6. **Các giới hạn đặc biệt và các định lí về giới hạn** được thừa nhận không chứng minh. Do vậy, như đối với dãy số, giáo viên không cần mất thời gian cho học sinh chép lại, mà tập trung vào phân tích đặc trưng của chúng, vào trình bày các ví dụ và cho học sinh làm các bài tập áp dụng.

Ta nhắc lại rằng SGK không còn đưa vào định lí về giới hạn của hàm số bị kẹp giữa hai hàm số có cùng giới hạn như trước. Điều này cho phép giảm tải nội dung của chương, nhưng vẫn không ảnh hưởng gì đối với việc nghiên cứu đạo hàm ở chương sau cũng như nghiên cứu nội dung khác của giải tích ở lớp 12. Khi nghiên cứu đạo hàm các hàm số lượng giác, kết quả $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ sẽ được thừa nhận.

7. **Giới hạn dạng vô định**

Để phù hợp với yêu cầu của chương trình, SGK không đưa vào một mục chuyên biệt về *giới hạn dạng vô định*. Nhưng việc giải nhiều bài toán trong chương này không thể tránh khỏi việc tính các giới hạn thuộc dạng vô định. Điều này có thể gây khó khăn cho việc dạy học phương pháp giải bài toán tính giới hạn. Để hạn chế khó khăn và phù hợp tinh thần giảm tải, SGK chỉ đưa vào bài toán tính giới hạn của một số hàm số đơn giản, hầu hết có dạng tương tự với các hàm số cần khảo sát ở lớp 12.

Để rèn luyện kĩ năng tính giới hạn hàm số dạng vô định (trong khi không trình bày một mục chuyên biệt về giới hạn dạng này), ta có thể hình thành ở học sinh phương pháp tính giới hạn dạng vô định theo hai cách sau :

– Thông báo phương pháp một cách tường minh và lặp lại nhiều lần trong quá trình giải các bài toán dạng này. Nói cách khác, ở đây, tri thức phương pháp không là đối tượng chủ yếu của một tình huống dạy học cụ thể, mà chỉ được nêu lên và lặp lại trong các cơ hội khác nhau, ở những thời điểm khác nhau của quá trình dạy học.

– Truyền thụ phương pháp một cách ngầm ẩn bằng cách cho học sinh luyện tập giải những bài tập có dạng tương thích với phương pháp. Điều này cũng giống như khi dạy học tính giới hạn dạng vô định của dãy số, dù ta không hề đề cập đến thuật ngữ "dạng vô định" và cũng không trình bày tường minh phương pháp giải.

C. BÀI TẬP

1. a) Hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$ xác định trên

$$\left(-\infty ; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3} ; +\infty\right) \text{ và } x = 4 \in \left(\frac{2}{3} ; +\infty\right).$$

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n \in \left(\dfrac{2}{3} ; +\infty\right)$; $x_n \neq 4$ và $x_n \to 4$ khi $n \to +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n + 1}{3x_n - 2} = \dfrac{4+1}{12-2} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x+1}{3x-2} = \dfrac{1}{2}$.

b) Hàm số $f(x) = \dfrac{2 - 5x^2}{x^2 + 3}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{2 - 5x_n^2}{x_n^2 + 3} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{x_n^2} - 5}{1 + \dfrac{3}{x_n^2}} = -5$. Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - 5x^2}{x^2 + 3} = -5$.

2. Về mặt sư phạm, học sinh sẽ hiểu và nắm vững hơn bản chất của một khái niệm, nếu họ có cơ hội xem xét đồng thời những đối tượng thoả mãn định nghĩa khái niệm (thường xuất hiện trong các ví dụ) và các đối tượng không thoả mãn định nghĩa đó (phản ví dụ).

Trong bài học, học sinh chỉ tiếp xúc với các ví dụ. Vì thế, phản ví dụ trong bài tập 2 được đưa vào nhằm khắc phục khiếm khuyết này.

Lời giải : Ta có

$$\lim u_n = \lim\frac{1}{n} = 0\ ;\ \lim v_n = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Do $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} > 0$ và $v_n = -\frac{1}{n} < 0$, nên $f(u_n) = \sqrt{\frac{1}{n}} + 1$ và $f(v_n) = -\frac{2}{n}$.

Từ đó

$$\lim f(u_n) = \lim\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + 1\right) = 1\ ;\ \lim f(v_n) = \lim\frac{-2}{n} = 0.$$

Vì $u_n \to 0$ và $v_n \to 0$, nhưng $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ nên hàm số $y = f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

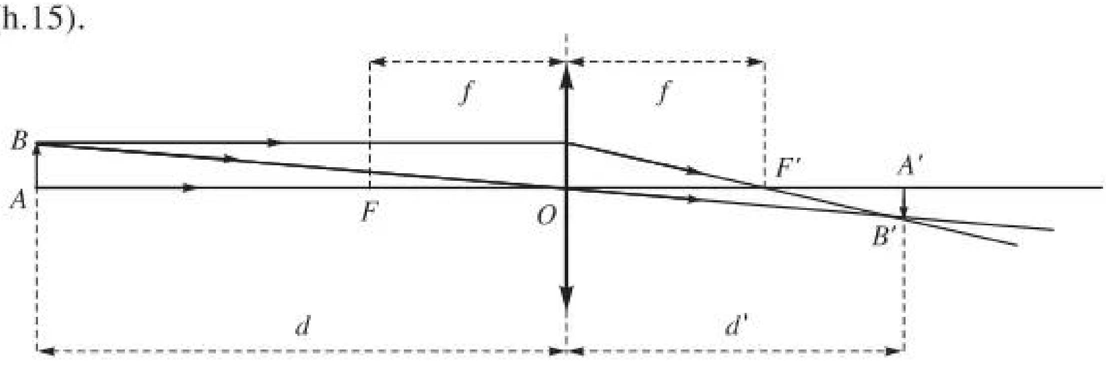
3. a) -4 ; b) 4. ; c) $\frac{1}{6}$; d) -2 ; e) 0 ; f) $-\infty$.

4. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

5. b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$.

6. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) -1.

7. (h.15).

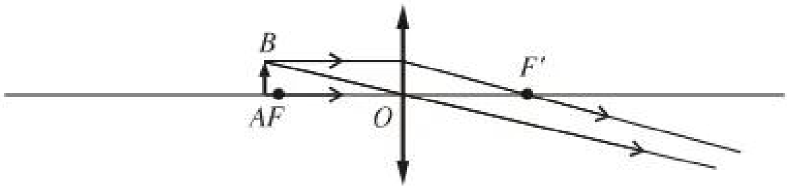


Hình 15

a) Từ hệ thức $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ suy ra : $d' = \varphi(d) = \frac{fd}{d - f}$;

b) • $\lim\limits_{d \to f^+} \varphi(d) = \lim\limits_{d \to f^+} \frac{fd}{d - f} = +\infty.$

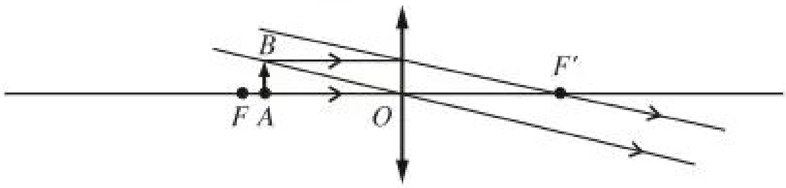
Kết quả này nghĩa là : Nếu vật thật AB tiến dần về tiêu điểm F sao cho d luôn lớn hơn f thì ảnh của nó dần tới dương vô cực (h.16).



Hình 16

• $\lim\limits_{d \to f^-} \varphi(d) = \lim\limits_{d \to f^-} \frac{fd}{d - f} = -\infty,$

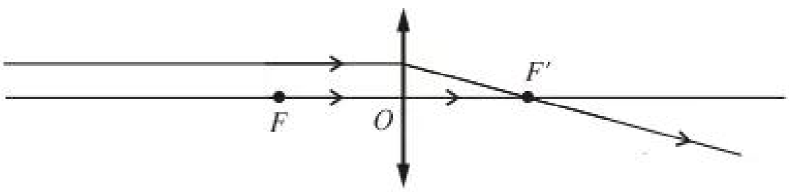
nghĩa là : Nếu vật thật AB tiến dần về tiêu điểm F sao cho d luôn nhỏ hơn f thì ảnh của nó dần tới âm vô cực (h.17).



Hình 17

• $\lim\limits_{d \to +\infty} \varphi(d) = \lim\limits_{d \to +\infty} \frac{fd}{d - f} = \lim\limits_{d \to +\infty} \frac{f}{1 - \frac{f}{d}} = f,$

nghĩa là : Nếu vật thật AB ở xa vô cực so với thấu kính thì ảnh của nó ở ngay trên tiêu diện ảnh (mặt phẳng qua tiêu điểm ảnh F' và vuông góc với trục chính) (h.18).



Hình 18