§2 HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP (5 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

– Hình thành các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp. Xây dựng các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

– Biết cách vận dụng chúng để giải các bài toán thực tiễn.

– Học sinh cần hiểu các khái niệm đó, phân biệt sự giống và khác nhau giữa chúng.

– Cần biết khi nào dùng tổ hợp, chỉnh hợp và phối hợp chúng với nhau để giải toán.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

Các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp là hoàn toàn mới đối với học sinh. Đó là những khái niệm rất khó đối với những người mới làm quen. Cần phải hình thành chúng dần dần qua các ví dụ thực tiễn.

I – HOÁN VỊ

Hoán vị là một khái niệm mở đầu của đại số tổ hợp. Nó được hình thành dần qua Ví dụ 1 và hoạt động **1**.

Qua Ví dụ 1 và hoạt động **1**, học sinh thấy xuất hiện vấn đề sắp thứ tự một tập hợp.

Kết quả sắp xếp một tập hợp hữu hạn theo thứ tự cho ta một hoán vị của tập hợp đó.

1 Có 3! = 6 số tự nhiên có ba chữ số khác nhau.

Ta có thể đưa ra các định nghĩa khác tương đương với định nghĩa trong SGK về hoán vị. Chẳng hạn :

– Một hoán vị của tập A gồm n phần tử là một dãy có thứ tự gồm n phần tử phân biệt của A.

– Một hoán vị của tập A gồm n phần tử là một danh sách có thứ tự gồm n phần tử phân biệt của A.

– Một hoán vị của tập A gồm n phần tử là một song ánh từ tập $\{1, 2, ..., n\}$ *vào A.*

Chú ý : Hoán vị acb của tập $A = \{a, b, c\}$ còn có thể viết cách khác là (a, c, b).

Cần nhấn mạnh : Hai hoán vị của cùng một tập hợp chỉ khác nhau nếu thứ tự sắp xếp của chúng khác nhau.

2 Có 10! cách.

II – CHỈNH HỢP

Ví dụ 3 và hoạt động **3** nhằm dẫn dắt học sinh dần đến khái niệm chỉnh hợp và củng cố khái niệm đó.

Một tập hợp vốn không có thứ tự nên các tập con của chúng cũng không có thứ tự. Cho nên nếu ta sắp thứ tự tập A thì ta được một hoán vị của A, nếu ta sắp thứ tự tập con k phần tử của A thì ta được một chỉnh hợp chập k của A.

3 Có A_4^2 vectơ.

Có thể đưa ra một vài định nghĩa khác về chỉnh hợp như sau :

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

– Một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A là một dãy có thứ tự gồm k phần tử khác nhau của tập A ;

– Một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A là một danh sách có thứ tự gồm k phần tử khác nhau của A ;

– Một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A là một đơn ánh từ tập $\{1, 2, ..., k\}$ vào tập A.

Cần để học sinh thấy rằng, hai chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho, khác nhau ở chỗ :

– Hoặc có phần tử ở chỉnh hợp này không ở chỉnh hợp kia ;

– Hoặc thứ tự sắp xếp của các phần tử trong chúng khác nhau.

Có hai cách lập một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Cách thứ nhất : – Lấy ra một tập con k phần tử của tập n phần tử đó ;

– Sắp xếp k phần tử đó theo thứ tự.

Cách thứ hai : Lấy lần lượt k phần tử của tập n phần tử đó và sắp xếp theo trình tự của quá trình lấy.

Cần chú ý rằng $0! = 1$ là một quy ước để thuận tiện cho việc dùng công thức

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Chú ý : Một hoán vị của n phần tử chính là chỉnh hợp chập n của n phần tử.

III – TỔ HỢP

Khái niệm này sẽ được hình thành dần qua Ví dụ 5, sau đó được củng cố bằng hoạt động **4**. Vì vậy, giáo viên cần giảng giải kĩ.

Theo định nghĩa, mỗi tập con k phần tử của tập A gồm n phần tử là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Như vậy, trong một tổ hợp không có thứ tự sắp xếp. Hai tổ hợp trùng nhau nếu hai tập con đó trùng nhau.

Giữa số các tổ hợp và số các chỉnh hợp chập k của n phần tử có hệ thức

$$\mathrm{A}_n^k = k!\mathrm{C}_n^k.$$

Như vậy, từ một tổ hợp chập k của n phần tử có thể tạo ra k! chỉnh hợp khác nhau. Đó chính là sự khác nhau căn bản giữa chỉnh hợp và tổ hợp.

Hoạt động **4** được đưa ra nhằm củng cố thêm ý niệm về tổ hợp mà đang được hình thành qua Ví dụ 5. Nó được giải như sau :

Có C_5^3 ; C_5^4 lần lượt là số các tổ hợp chập 3 và 4 của 5 phần tử của tập A.

Hoạt động **5** được giải như sau :

Vì hai đội bất kì gặp nhau đúng một trận, nên số trận bằng số các tổ hợp chập 2 của 16 (đội).

Vậy đáp số là 120 (trận).

• Khi dạy về tổ hợp và chỉnh hợp, giáo viên cần chỉ rõ cho học sinh khi nào dùng tổ hợp, khi nào dùng chỉnh hợp.

C. BÀI TẬP

1. a) Mỗi số gồm sáu chữ số khác nhau được đồng nhất với một hoán vị của sáu chữ số 1, 2, ..., 6. Vậy có 6! số.

b) Để tạo nên một số chẵn, ta cần chọn chữ số hàng đơn vị là số chẵn. Có 3 cách chọn.

5 chữ số còn lại (sau khi đã chọn chữ số hàng đơn vị) được sắp theo thứ tự sẽ tạo nên một hoán vị của 5 phần tử. Có 5! cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân có

$$3 \times 5! = 360$$

số các số chẵn có sáu chữ số tạo nên từ sáu chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Tương tự, số các số lẻ có sáu chữ số tạo nên từ sáu chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 cũng là 360.

c) Các số trong câu a) bé hơn 432 000 bao gồm :

* *Các số có chữ số hàng trăm nghìn nhỏ hơn 4*

– Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn, đó là các chữ số 1, 2, 3.

– Sau khi đã chọn chữ số hàng trăm nghìn, ta phải chọn tiếp năm chữ số còn lại và sắp thứ tự chúng để ghép với chữ số hàng trăm nghìn tạo thành số có sáu chữ số. Mỗi một lần chọn là một hoán vị của 5 phần tử (5 chữ số). Có 5! cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân, các số có chữ số hàng trăm nghìn nhỏ hơn 4 là

$$3 \times 5! = 360 \text{ (số)}.$$

* *Các số có chữ số hàng trăm nghìn là 4 và chữ số hàng chục nghìn nhỏ hơn 3*

– Có 2 cách chọn chữ số hàng chục nghìn, đó là các chữ số 1, 2.

– Sau khi đã chọn chữ số hàng chục nghìn phải chọn tiếp bốn chữ số nữa và sắp thứ tự chúng để ghép với hai chữ số hàng trăm nghìn và hàng chục nghìn tạo thành số có sáu chữ số. Có 4! cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân có tất cả

$$2 \times 4! = 48$$

số như vậy.

* *Các số có chữ số hàng trăm nghìn là* 4, *hàng chục nghìn là* 3, *hàng nghìn là* 1 (*nhỏ hơn* 2)

Vậy có 1.3! = 6 (số).

Từ đó theo quy tắc cộng, số các số trong câu a) bé hơn 432 000 là

$$360 + 48 + 6 = 414 \text{ (số)}.$$

2. Mỗi cách sắp xếp chỗ ngồi của 10 người khách theo hàng ngang cho một hoán vị của 10 và ngược lại.

Vậy có 10! cách sắp xếp.

3. Vì bảy bông hoa màu khác nhau và ba lọ cắm hoa khác nhau nên mỗi lần chọn ra ba bông hoa để cắm vào ba lọ, ta có một chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử. Vậy số cách cắm hoa bằng số các chỉnh hợp chập 3 của 7 (bông hoa).

Do đó, kết quả cần tìm là

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 210 \text{ (cách)}.$$

4. Kết quả cần tìm là : Có $A_6^4 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = 360$ cách mắc nối tiếp bốn bóng đèn chọn từ sáu bóng.

5. a) Đánh số 3 bông hoa 1, 2, 3. Chọn 3 trong 5 lọ để cắm hoa. Mỗi cách cắm là một chỉnh hợp chập 3 của 5. Vậy số cách cắm là

$$A_5^3 = 5.4.3 = 60 \text{ (cách)}.$$

b) Nếu các bông hoa là như nhau thì mỗi cách cắm là một tổ hợp chập 3 của 5 (lọ). Vậy số cách cắm là

$$C_5^3 = \frac{5.4.3}{3!} = 10 \text{ (cách)}.$$

6. Số tam giác bằng số các tổ hợp chập 3 của 6 (điểm). Từ đó, ta có số tam giác là $C_6^3 = 20$.

7. Để tạo nên một hình chữ nhật từ chín đường thẳng đã cho, ta tiến hành hai hành động :

– *Hành động 1.* Chọn hai đường thẳng từ bốn đường thẳng song song. Vì các đường thẳng đã cố định nên mỗi lần chọn cho ta một tổ hợp chập 2 của 4 phần tử (4 đường thẳng). Vậy có C_4^2 cách.

– *Hành động 2.* Chọn hai trong năm đường thẳng vuông góc với bốn đường thẳng song song với nhau. Tương tự, ta có C_5^2 cách.

Từ đó theo quy tắc nhân, ta có số hình chữ nhật là

$$C_4^2.C_5^2 = 60 \text{ (hình chữ nhật)}.$$