§2 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN (5 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

• Nắm được điều kiện của a để các phương trình $\sin x = a$ và $\cos x = a$ có nghiệm.

• Biết cách viết công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản trong trường hợp số đo được cho bằng radian và số đo được cho bằng độ.

• Biết cách sử dụng các kí hiệu $\arcsin a$, $\arccos a$, $\arctan a$ và $\operatorname{arccot} a$ khi viết công thức nghiệm của phương trình lượng giác.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

Trước hết cần chú ý vấn đề sau : Nói chung khi giải các phương trình (bậc nhất, bậc hai, vô tỉ, ...), ta được nghiệm là các số thực. Tuy nhiên khi giải các phương trình lượng giác, ta coi nghiệm là số đo của các góc lượng giác tính bằng radian hoặc bằng độ. Như vậy, ta đã chấp nhận việc mở rộng khái niệm phương trình. Chẳng hạn, ta nói : Giải các phương trình

$$\sin 3x = \sin 24^{o}, \qquad (1)$$

$$\cos(x - 20^{o}) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (2)$$

Rõ ràng (1) và (2) không phải là các phương trình theo quan niệm từ lớp dưới cho đến nay, do trong phương trình ta không đưa đơn vị vào. Tuy nhiên trong nhiều bài toán thực tế, ta lại cần tìm các giá trị của x thoả mãn các đẳng thức như vậy. Do đó để cho tiện, ta đã coi chúng là các phương trình và phát biểu công thức giải.

Một đặc điểm khác của phương trình lượng giác là : Hàm số lượng giác có tính tuần hoàn nên nếu một phương trình lượng giác có một nghiệm thì cũng có vô số nghiệm. Điều này được thể hiện ở chỗ trong công thức nghiệm của phương trình lượng giác bao giờ cũng có một tham số nguyên k.

1. Phương trình $\sin x = a$

a) Với cách hiểu nghiệm của phương trình lượng giác như trên, ta tiến hành việc giải phương trình lượng giác cơ bản $\sin x = a$.

Các hoạt động **1** và **2** chuẩn bị cho việc giải phương trình lượng giác : Mỗi học sinh có thể tìm một giá trị của x thoả mãn $2\sin x - 1 = 0$, dẫn đến nhận thức là có nhiều giá trị của x thoả mãn phương trình đó. Còn trường hợp phương trình $\sin x = -2$, các em có thể thấy rằng không có giá trị x nào thoả mãn phương trình vì với mọi x ta đều có $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Với $|a| \leq 1$, ta sử dụng đường tròn lượng giác để tìm số đo các cung lượng giác có sin bằng a.

b) Về kí hiệu* arcsin *a

Trước đây, SGK Toán 11 có đưa vào khái niệm hàm số lượng giác ngược, xem như hàm ngược của hàm số lượng giác. Tuy nhiên, việc trình bày khái niệm hàm ngược khá phức tạp, đòi hỏi hàm đã cho phải là một song ánh. Vì vậy, trong SGK chỉnh lí hợp nhất đã bỏ khái niệm này. Trong chương trình mới có đưa lại các kí hiệu này với mục đích để tiện cho việc viết các nghiệm trong trường hợp a không phải là sin của các cung đặc biệt, chẳng hạn phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$.

Thay cho việc viết lời giải : Đặt $\frac{2}{3} = \sin\alpha$ thì

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}),$$

ta viết luôn nghiệm là :

$$x = \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi$$

$$\text{và} \quad x = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Như vậy, $\arcsin a$ chỉ là một kí hiệu thoả mãn điều kiện $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \dfrac{\pi}{2}$, chứ không xét hàm $\arcsin x$ với $-1 \leq x \leq 1$ như trước đây.

c) Nói chung, nghiệm của phương trình lượng giác sẽ được viết dưới dạng số đo của các góc tính bằng radian. Đó là các số thực (ta đã quy ước không viết đơn vị radian sau các số này). Trường hợp nghiệm là số đo được cho bằng độ thì chỉ sử dụng khi trong phương trình có mặt các số đo góc bằng độ, hoặc đối với các phương trình nảy sinh trong các bài toán tính góc ở hình học (phẳng hay không gian). Đặc biệt cần nhắc nhở học sinh không dùng đồng thời hai đơn vị radian và độ trong một công thức nghiệm.

2. Phương trình $\cos x = a$

Đối với phương trình $\cos x = a$, ta làm hoàn toàn tương tự như với phương trình $\sin x = a$, chỉ có hai điều khác biệt : công thức nghiệm bây giờ là $x = \pm\, \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ và kí hiệu $\arccos a$. Cung có côsin bằng a, mà ta kí hiệu là $\arccos a$, phải thoả mãn điều kiện $0 \leq \arccos a \leq \pi$.

3. Phương trình $\tan x = a$, $\cot x = a$

a) Đối với các phương trình $\tan x = a$ và $\cot x = a$, SGK nêu cách trình bày khác như sau : Xét giao điểm của đường thẳng $y = a$ với đồ thị của các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$.

Thực ra đối với các phương trình $\sin x = a$ và $\cos x = a$, ta cũng có thể sử dụng cách trình bày này, tuy nhiên trong trường hợp này hơi khó phát biểu công thức nghiệm.

Đối với các phương trình $\tan x = a$ và $\cot x = a$ thì công thức nghiệm khá đơn giản, do các hàm số tang và côtang là những hàm số tuần hoàn có chu kì là π.

b) Về kí hiệu $\arctan a$, $\operatorname{arccot} a$

Tương tự hai kí hiệu $\arcsin a$ và $\arccos a$, ở đây ta cũng dùng hai kí hiệu $\arctan a$ và $\operatorname{arccot} a$ với điều kiện $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan a < \dfrac{\pi}{2}$ và $0 < \operatorname{arccot} a < \pi$.

Đây chính là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = a$ với một phần của đồ thị các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ và $(0 ; \pi)$ tương ứng.

c) Vì các kí hiệu $\arcsin a$, $\arccos a$, $\arctan a$ và $\text{arccot}\, a$ chỉ các số đo bằng radian của các cung nên nếu trong phương trình có đơn vị độ thì không được dùng các kí hiệu đó. Chẳng hạn, không thể viết nghiệm của phương trình $\cos(x - 35^\circ) = \frac{1}{3}$ là $x = 35^\circ \pm \arccos\frac{1}{3} + k2\pi$.

Trong những trường hợp này, chỉ có thể dùng máy tính bỏ túi để giải theo một trong hai cách sau :

1) Đổi 35° ra radian rồi giải tiếp theo công thức.

2) Tính $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (tức là $\arccos\frac{1}{3}$) đổi ra độ, phút, giây được $70^\circ 31'43''$, kết quả nghiệm là : $x \approx 105^\circ 31'43'' + k360^\circ$ và $x \approx -35^\circ 31'43'' + k360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ (Xem *Bài đọc thêm* – Giải phương trình lượng giác cơ bản bằng máy tính bỏ túi).

C. BÀI TẬP

Đối với các giá trị a có trong bảng các giá trị lượng giác của các cung và góc đặc biệt thì ta dùng bảng để tìm nghiệm α, còn nếu a không có trong bảng đó thì α là $\arcsin a$, $\arccos a$, $\arctan a$ tương ứng.

Từ nay về sau kí hiệu k chỉ các số nguyên tuỳ ý ($k \in \mathbb{Z}$).

1. a) $x = \arcsin\frac{1}{3} - 2 + k2\pi$; $x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} - 2 + k2\pi$;

b) $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$;

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{3\pi}{2}$;

d) $x = -40^\circ + k.180^\circ$; $x = 110^\circ + k180^\circ$.

2. $\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$

3. a) $x = 1 \pm \arccos\dfrac{2}{3} + k2\pi$; b) $x = \pm 4^{\circ} + k120^{\circ}$;

c) $x = \dfrac{11\pi}{18} + k\dfrac{4\pi}{3},\ x = -\dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{4\pi}{3}$;

d) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

4. Điều kiện : $\sin 2x \neq 1$.

$$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi. \end{array}\right.$$

Giá trị $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ bị loại do điều kiện. Vậy nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. a) $x = 45^{\circ} + k180^{\circ}$; b) $x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{\pi}{3}$;

c) Điều kiện : $\cos x \neq 0$. *Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ x = k\pi$;

d) Điều kiện : $\sin x \neq 0$. *Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ x = k\dfrac{\pi}{3}$ $(k \neq 3m,\ m \in \mathbb{Z})$.

6. Điều kiện : $\cos 2x \neq 0$ và $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \neq 0$. Với điều kiện đó ta có

$$\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \tan 2x \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{4} - x + k\pi$$

$$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\ (k \neq 3m - 1,\ m \in \mathbb{Z}).$$

7. a) $\cos 5x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow 5x = \pm\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi. \end{array}\right.$$

b) Điều kiện : $\cos 3x \neq 0$, $\cos x \neq 0$.

$$\tan 3x \tan x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan 3x = \cot x \Rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

Vấn đề họ nghiệm của phương trình lượng giác

Thuật ngữ "Họ nghiệm" của phương trình lượng giác đã được dùng rải rác trong các SGK trước đây nhưng khái niệm đó lại chưa được định nghĩa rõ ràng.

SGK lần này không đề cập đến khái niệm "họ nghiệm". Tuy nhiên để giúp giáo viên giải đáp thắc mắc khi học sinh đọc các sách khác, chúng tôi xin trình bày một cách hiểu như sau.

Ta biết do tính tuần hoàn của hàm số lượng giác, nếu một phương trình lượng giác có nghiệm thì tập nghiệm của nó là một tập vô hạn.

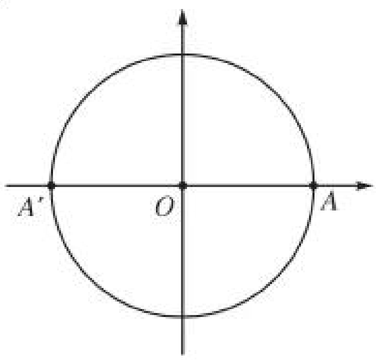
Một họ nghiệm theo cách hiểu lâu nay thực chất là một tập con (vô hạn) của tập này. Vấn đề là coi tập con các nghiệm nào là một họ nghiệm.

Theo chúng tôi, để xác định ta nên dùng cách biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Mỗi họ nghiệm của một phương trình lượng giác là tập hợp các nghiệm có chung một điểm cuối trên đường tròn lượng giác.

Ví dụ 1. Phương trình $\sin x = 0$ có công thức nghiệm là $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình này có hai họ nghiệm $x = 2m\pi$ và $x = (2m + 1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, ứng với hai điểm cuối A và A' (h.7).

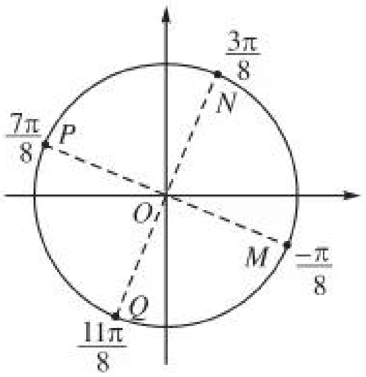


Hình 7

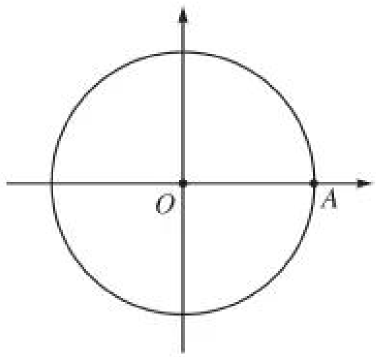
Ví dụ 2. Phương trình $\sin 4x = -1$ có công thức nghiệm là

$$x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình này có bốn họ nghiệm ứng với các điểm M, N, P, Q trên đường tròn lượng giác (h.8).



Hình 8



Hình 9

Ví dụ 3. Phương trình $\cos\frac{x}{4} = -1$ có công thức nghiệm là

$$x = (2k + 1)4\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình này có một họ nghiệm ứng với điểm cuối A trên đường tròn lượng giác (h.9). Tuy nhiên ta thấy không phải cung nào có điểm cuối là A cũng là nghiệm của phương trình đã cho.