§2 QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM (3 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Áp dụng thành thạo các công thức sau :

a) Các phép toán đạo hàm

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (1)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (2)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \; (v = v(x) \neq 0) \quad (3)$$

b) Đạo hàm của hàm hợp

$$y'_x = y'_u . u'_x . \quad (4)$$

c) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \ (n \geq 1), \tag{5}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}. \tag{6}$$

2. Biết cách chứng minh các công thức (1), (5).

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Hoạt động **1** nhằm cho học sinh thấy rằng nếu tiến hành tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$ tại một điểm x tuỳ ý thì ta được công thức tính đạo hàm tổng quát. Sau đó muốn tính đạo hàm tại một điểm, cụ thể tại x_0 thì chỉ cần thay giá trị này vào công thức tổng quát. Điều đó cho phép tránh lặp lại từng bước khi tính đạo hàm tại mỗi điểm.

Từ kết quả thu được $(x^3)' = 3x^2$, ta muốn học sinh dự đoán đạo hàm của hàm số $y = x^{100}$ tại x tuỳ ý.

Công thức tính đạo hàm của các hàm số thường gặp dễ thuộc và dễ áp dụng. Tuy nhiên để có kĩ năng thành thạo, học sinh phải làm nhiều bài tập.

Vì học sinh chưa được học những khái niệm mở rộng của luỹ thừa ($a^0 = 1$, $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, ...) nên Định lí 1 chỉ được phát biểu và chứng minh cho trường hợp luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Để có đạo hàm của các hàm số :

$$y = c \text{ (hằng số)},$$

$$y = x,$$

ta phải chứng minh riêng biệt.

Kết quả của **2** như sau : Trước hết lưu ý rằng cả hai hàm số $y = c$ (hằng số) và $y = x$ đều xác định trên khoảng $(-\infty\,;+\infty)$.

• Chứng minh $(c)' = 0$:

Giả sử Δx là số gia của x, thì số gia tương ứng của hàm số $y = c$ là :

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = c - c = 0.$$

Do đó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \text{ và } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \text{ tức là } (c)' = 0.$$

• Chứng minh $(x)' = 1$:

Giả sử Δx là số gia của x, thì số gia tương ứng của hàm số $y = x$ là

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Do đó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ và } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \text{ tức là } (x)' = 1.$$

Cần lưu ý học sinh rằng, vì ta chưa học khái niệm mở rộng của luỹ thừa (luỹ thừa 0 và luỹ thừa âm) cho nên không thể ghép các kết quả trên vào khẳng định của Định lí 1 được.

Rõ ràng các chứng minh trên rất dễ, học sinh có thể tự làm. Giáo viên nên hướng dẫn để học sinh chứng minh coi như một luyện tập việc tìm đạo hàm bằng định nghĩa. Nên để học sinh tự làm trong hoạt động **2**.

Hoạt động **3** muốn nhắc nhở học sinh rằng hàm số $y = \sqrt{x}$ xác định với mọi $x \geq 0$ và chỉ có đạo hàm khi $x > 0$.

Hàm số $y = \sqrt{x}$ xác định và liên tục trên $[0 ; +\infty)$ nhưng không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$. Ta lại có thêm một ví dụ nữa chứng tỏ một hàm số liên tục tại một điểm chưa chắc đã có đạo hàm tại điểm đó.

Mặt khác hàm số $y = \sqrt{x}$ xác định trên $[0 ; +\infty)$ nhưng đạo hàm của nó $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ chỉ xác định với mọi $x > 0$. Tập xác định của y' là một tập con của tập xác định của y.

Một lần nữa cần lưu ý rằng, chương trình lớp 11 chưa đề cập khái niệm số mũ âm, số mũ phân, ... nên chưa được phép tính đạo hàm như sau :

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ ;$$

$$(\sqrt[5]{x^4})' = (x^{\frac{4}{5}})' = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}.$$

2. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Định lí 3 cho các công thức tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương. Ở đây, giáo viên nên đòi hỏi học sinh phát biểu thành lời định lí trên, tập cho học sinh hiểu và nhớ các định lí bằng các công thức chứ không phải học thuộc lòng định lí. Tuỳ tình hình học sinh, có thể chuyển hoạt động **4** lên trên phần chứng minh, học sinh áp dụng luôn các công thức trên vào các bài tập cụ thể. Sau khi nhớ và biết cách áp dụng, ta mới tiến hành chứng minh các công thức (1), (2), (3).

Kết quả của **4** là $y = 5x^3 - 2x^5 \Rightarrow y' = 15x^2 - 10x^4$

và $$y = -x^3\sqrt{x} \Rightarrow y' = -\frac{7x^3}{2\sqrt{x}}.$$

Ở đây, chúng ta đòi hỏi học sinh phải biết cách chứng minh các công thức tính đạo hàm của một tích, một thương trong trường hợp tổng quát và tự chứng minh các công thức đó trong các trường hợp đặc biệt (chính là kết quả của **5**) :

$$(ku)' = ku' ;$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).$$

Cách làm :

1) $y = ku(x)$.

• Giả sử Δx là số gia của x. Khi đó :

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = k[u(x + \Delta x) - u(x)] = k\Delta u ;$$

• $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$;

• $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(k\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) = k\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot$

Vậy $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = ku'(x)$ (đpcm).

2) $y = \dfrac{1}{v}$.

Vì $v = v(x)$ có đạo hàm và khác 0 tại x nên có một khoảng $K = (x - h\ ;\ x + h)$ sao cho trong khoảng K, $v(x)$ luôn luôn khác không.

• Giả sử Δx là số gia của x sao cho $x + \Delta x \in K$;

• $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \dfrac{1}{v(x + \Delta x)} - \dfrac{1}{v(x)}$

$$= -\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{v(x)v(x + \Delta x)}\ ;$$

• $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-\dfrac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x + \Delta x)}$;

• Vì $v = v(x)$ có đạo hàm tại x (và do đó liên tục tại x), ta có :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) = v(x).$$

Suy ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x)v(x + \Delta x)} = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$ (đpcm).

Sau đó, đòi hỏi học sinh tự đưa ra ví dụ áp dụng.

Sau khi gợi ý để học sinh đưa ra các ví dụ dạng

$$\left(\frac{1}{5x - 1}\right)' = -\frac{(5x - 1)'}{(5x - 1)^2} = -\frac{5}{(5x - 1)^2},$$

cần cho học sinh xét trường hợp đặc biệt

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

3. Đạo hàm của hàm hợp

Trong SGK đã đưa ra khái niệm $y = f(g(x))$ là hàm hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$. Ta cũng có thể nói $y = f(g(x))$ là hàm hợp của hai hàm số $u = g(x)$ và $y = f(u)$.

Khái niệm hàm hợp và định lí về đạo hàm của hàm hợp là khó, cho nên trong SGK không trình bày chứng minh của định lí này.

Kết quả của 6 : Hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ là hàm hợp của các hàm số $y = \sqrt{u}$ và $u = x^2 + x + 1$.

Ta nêu cách chứng minh định lí dưới đây.

Định lí

$$\begin{cases} u = g(x) \text{ có đạo hàm } u'_x \text{ tại } x \\ y = f(u) \text{ có đạo hàm } y'_u \text{ tại } u = u(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(g(x)) \text{ có đạo hàm } y'_x \text{ tại } x \text{ là} \\ y'_x = y'_u.u'_x \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử Δx là số gia của x. Khi đó

$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ là số gia tương ứng của $u = g(x)$;

$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$ là số gia tương ứng của $y = f(u)$.

Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Để đơn giản, ta giả thiết $\Delta u \neq 0$. Khi đó $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

Theo giả thiết khi $\Delta x \to 0$ thì $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'_x$, do đó $\Delta u = \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x \to u'_x.0 = 0$.

Mặt khác $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} \to y'_u$ khi $\Delta x \to 0$ (khi đó $\Delta u \to 0$). Vì vậy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u.u'_x.$$

Điều đó chứng tỏ rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$ và $y'_x = y'_u.u'_x$.

Người ta chứng minh rằng định lí vẫn còn đúng trong trường hợp $\Delta u = 0$.

Để học sinh quen dần với việc tính đạo hàm của hàm hợp, giáo viên nên cho các bài tập từ dễ đến khó, chẳng hạn :

$$((2x + 3)^3)' = 3(2x + 3)^2 \,.\, (2x + 3)' = 6(2x + 3)^2 \;;$$

$$\left(\sqrt{1 - 5x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1 - 5x}}.(1 - 5x)' = -\frac{5}{2\sqrt{1 - 5x}} \;;$$

$$\left(\left(\sqrt{x}-2x^3\right)^2\right)' = 2\left(\sqrt{x}-2x^3\right).\left(\sqrt{x}-2x^3\right)'$$
$$= 2\left(\sqrt{x}-2x^3\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-6x^2\right).$$

Sau khi học đạo hàm của các hàm số lượng giác, ta thường gặp bài tập tính đạo hàm của hàm số dạng $y = \sin(\cos 5x)$.

Áp dụng công thức mở rộng tính đạo hàm của hàm hợp, ta được

$$[\sin(\cos 5x)]' = \cos(\cos 5x).(\cos 5x)'$$
$$= -\sin 5x\,.\cos(\cos 5x)\,.\,(5x)'$$
$$= -\,5\sin 5x.\cos(\cos 5x).$$

C. BÀI TẬP

1. a) -1 ; b) 10 ;

2. a) $5x^4 - 12x^2 + 2$; b) $-2x^3 + 2x - \frac{1}{3}$;

c) $2x^3 - 2x^2 + \frac{8}{5}x$; d) $-63x^6 + 120x^4$.

3. a) $3x^5(x^5-5)^2(7x^5-10)$; b) $-4x(3x^2-1)$;

c) $\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$; d) $\frac{5x^2-6x-2}{(x^2-x+1)^2}$;

e) $-\frac{6n}{x^3}\left(m+\frac{n}{x^2}\right)^2$.

4. a) $2x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$; b) $\frac{-2x-5}{2\sqrt{2-5x-x^2}}$;

c) $\frac{x^2(3a^2-2x^2)}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$; d) $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

5. a) $x < 0$ hoặc $x > 2$; b) $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$.