§3 CẤP SỐ CỘNG (2 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Biết khái niệm cấp số cộng, công thức số hạng tổng quát, tính chất các số hạng và công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Biết sử dụng các công thức và tính chất của cấp số cộng để giải các bài toán : Tìm các yếu tố còn lại khi biết ba trong năm yếu tố u_1, u_n, n, d, S_n.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – ĐỊNH NGHĨA

1. Hoạt động **1** có tính chất "mở", vì như yêu cầu bài toán đã nêu : "... hãy chỉ ra một quy luật ..." (nghĩa là không chỉ có một).

Hoạt động này yêu cầu học sinh phải tự suy nghĩ, tìm tòi để phát biểu ý kiến của mình. Và trong trường hợp thật sự cần thiết nên có sự gợi ý của giáo viên.

Có thể phân làm hai loại ý kiến :

Loại 1. "Quy luật" được nêu ra, nếu thực hiện có thể nhận được các kết quả khác nhau.

Ví dụ, từ nhận xét tổng của bốn số là 20, ta viết tiếp bốn số có tổng bằng 20 và số thứ năm tuỳ ý. Dễ thấy, phương trình

$$u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = 20$$

có 4 ẩn, tất nhiên là vô định.

Loại 2. "Quy luật" được nêu ra, nếu thực hiện chỉ cho ta một kết quả duy nhất.

Ví dụ, quy luật đơn giản nhất là nhóm gồm bốn số đã cho được lặp lại theo thứ tự đó. Tuy nhiên, vì mục đích của hoạt động **1** là phải phát hiện ra "quy luật" dẫn đến định nghĩa nên khi cần thiết giáo viên có thể gợi ý học sinh : Xét hiệu hai số hạng liên tiếp từ trái sang phải ; xét số trung bình cộng hoặc nhận xét về khoảng cách giữa hai điểm liền nhau khi biểu diễn bốn số trên trục số ...

2. Định nghĩa của SGK là không khó, tuy nhiên cần làm rõ ý nghĩa của công thức truy hồi nêu trong định nghĩa

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*. \qquad (1)$$

Đó là :

– Công thức (1) cho phép tính được số hạng bất kì nếu biết công sai và số hạng đứng ngay trước nó hoặc ngay sau nó.

– Tính được công sai d nếu biết hai số hạng liên tiếp

$$d = u_{n+1} - u_n.$$

Tuy nhiên, công thức (1) không cho phép tính ngay được một số hạng khi biết chỉ số của nó.

Ví dụ 1 trong SGK khá đơn giản, giáo viên nên chú ý rèn luyện cách trình bày cho học sinh. Cách trình bày như của SGK đã theo đúng định nghĩa vừa nêu.

Hoạt động **2** được coi là phần luyện tập sau định nghĩa.

II – SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

1. Hoạt động **3** nhằm để học sinh tìm ra được ý nghĩa toán học đằng sau một trò chơi của trẻ nhỏ. Học sinh có thể vẽ hình trên giấy để từ đó viết được một vài số hạng đầu của dãy số

$$3, 7, 11, 15, 19, \ldots$$

trong đó, các số hạng để chỉ số que diêm ở tầng đáy tháp, còn số chỉ thứ tự của số hạng chính là số tầng tương ứng. Dễ thấy, dãy số là cấp số cộng với $u_1 = 3$ và $d = 4$. Và bài toán đặt ra là tìm u_{100} ? Áp dụng công thức của định nghĩa, ta có :

$$u_2 = u_1 + 4$$

$$u_3 = u_2 + 4 = u_1 + 2.4$$

$$u_4 = u_3 + 4 = u_1 + 3.4$$

$$u_5 = u_4 + 4 = u_1 + 4.4.$$

Nếu viết tiếp ta sẽ có u_{100}, tuy nhiên nếu nhận xét về mối liên hệ giữa số tầng với bội số của 4 trong các hệ thức trên ta sẽ có ngay

$$u_{100} = u_1 + (100 - 1).4 = 3 + 396 = 399.$$

2. Số hạng tổng quát

SGK nêu ra công thức số hạng tổng quát

$$u_n = u_1 + (n - 1).d \text{ với } n \geq 2. \qquad (2)$$

Từ hoạt động **3**, có thể dự đoán được công thức (2).

Việc chứng minh công thức (2) có thể tiến hành theo cách sau :

Cách 1 : Dùng phương pháp quy nạp toán học (SGK).

Cách 2 : Áp dụng liên tiếp công thức định nghĩa, ta có :

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + d \\ u_3 &= u_2 + d \\ u_4 &= u_3 + d \\ &\dots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + d \\ u_n &= u_{n-1} + d. \end{aligned}$$

Cộng các vế tương ứng của $(n - 1)$ đẳng thức trên và giản ước, ta được

$$u_n = u_1 + (n - 1)d.$$

Ví dụ 2 có ba câu, trong đó hai câu a), b) áp dụng trực tiếp công thức số hạng tổng quát. Riêng câu c), ngoài việc áp dụng công thức số hạng tổng quát (hoặc định nghĩa) để tìm năm số hạng đầu của cấp số, phần còn lại có mục đích chuẩn bị cho phần III.

III – TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG

1. SGK đã phát biểu và chứng minh định lí về tính chất các số hạng của cấp số cộng.

Tuy nhiên, tổng quát hơn có thể thay hai số hạng đứng kề bên u_k bằng hai số hạng cách đều nó, đó là u_{k-p} và u_{k+p} $(p < k)$.

Ta có $$u_k = \frac{u_{k-p} + u_{k+p}}{2}.$$

Khi $p = 1$, ta có định lí đã nêu trong SGK.

2. Ngược lại, nếu cấp số cộng (u_n) thoả mãn điều kiện

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với mọi } k \geq 2 \qquad (1)$$

thì $$2u_k = u_{k-1} + u_{k+1}$$

hay $$u_k - u_{k-1} = u_{k+1} - u_k.$$

Nếu đặt d là giá trị chung của hai vế trong hệ thức trên, ta có

$$u_k = u_{k-1} + d \text{ với mọi } k \geq 2.$$

Do đó, dãy số (u_n) là cấp số cộng.

Như vậy, ta có thể phát biểu thành định lí cần và đủ.

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA CẤP SỐ CỘNG

1. Hoạt động **4** có hai phần :

a) Việc nêu nhận xét về tổng của các số hạng ở mỗi cột đều bằng 26 là quá đơn giản. Tuy nhiên, giáo viên nên gợi ý để học sinh nhận xét được rằng, trừ hai cột đầu và cuối thì các cột còn lại đều có hai số hạng cách đều hai số hạng đầu và cuối.

b) Tính tổng các số hạng bằng cách thông thường không phải là mục đích của hoạt động này. Mà, điều cần phát hiện ra và sử dụng các tổng bằng nhau (bằng 26) mới là quan trọng.

Gọi tổng cần tìm là S, ta có $2S = 8.26$, suy ra $S = \dfrac{8.26}{2} = 104$.

2. SGK đã giới thiệu định lí và công thức

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

Ta có thêm một tính chất của cấp số cộng hữu hạn, đó là :

Trong một cấp số cộng hữu hạn, tổng của hai số hạng cách đều hai số hạng đầu và cuối thì bằng tổng của hai số hạng đầu và cuối.

Ngoài ra có thể chứng minh trực tiếp công thức (4') của SGK như sau :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \\ &= u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) + \ldots + u_1 + (n-1)d \\ &= n.u_1 + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]d. \end{aligned}$$

Sử dụng công thức ở hoạt động 2, §1, ta có :

$$1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Suy ra $$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

Từ (4') nếu áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta tìm ra công thức (4) của SGK.

3. Về nội dung Ví dụ 3.

Nội dung Ví dụ 3 khá tổng hợp, trong đó đã dùng định nghĩa để chứng minh một dãy số là cấp số cộng và sử dụng các công thức (4) hoặc (4').

C. BÀI TẬP

1. Phương pháp chung là xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n$.

- Nếu H là hằng số thì dãy số là cấp số cộng.
- Nếu $H = f(n)$ thì dãy số không phải là cấp số cộng.

a) $u_{n+1} - u_n = -2\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, vậy dãy số là cấp số cộng có $u_1 = 3$ và $d = -2$.

b) Dãy số là cấp số cộng với $u_1 = -\frac{1}{2}$ và $d = \frac{1}{2}$.

c) $u_{n+1} - u_n = 2.3^n$, vậy dãy số không phải là cấp số cộng.

d) Dãy số là cấp số cộng có $u_1 = 2$, $d = -\frac{3}{2}$.

2. Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$.

a) Giải hệ

$$\begin{cases} u_1 - u_1 - 2d + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17. \end{cases}$$

Đáp số : $u_1 = 16$, $d = -3$.

b) Giải hệ

$$\begin{cases} u_1 + 6d - u_1 - 2d = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 2d = 4 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75. \end{cases}$$

Đáp số : $u_1 = 3$ và $d = 2$ hoặc $u_1 = -17$ và $d = 2$.

3. a) Cần biết ít nhất ba trong năm đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n thì có thể tính được hai đại lượng còn lại.

b) Thực chất đây là năm bài tập nhỏ ứng với các dữ liệu ở năm dòng. Học sinh phải giải từng bài nhỏ rồi mới điền kết quả.

b1) Biết $u_1 = -2$, $u_n = 55$, $n = 20$. Tìm d, S_n.

Đáp số : $d = 3$, $S_{20} = 530$.

b2) Biết $d = -4$, $n = 15$, $S_n = 120$. Tìm u_1, u_n.

Áp dụng các công thức u_n và $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$, ta có :

$$\begin{cases} u_1 - u_{15} = 56 \\ u_1 + u_{15} = 16. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được $u_1 = 36$, $u_{15} = -20$.

Tuy nhiên, nếu sử dụng công thức

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

thì
$$S_{15} = 120 = 15u_1 + \frac{15.14}{2}(-4).$$

Ta có ngay $u_1 = 36$ và tìm tiếp $u_{15} = -20$.

Cách giải này gọn hơn do việc lựa chọn công thức S_n phù hợp với việc biết n và d.

b3) *Đáp số :* $n = 28$, $S_n = 140$.

b4) *Đáp số :* $u_1 = -5$, $d = 2$.

b5) *Đáp số :* $n = 10$, $u_n = -43$.

4. a) Gọi chiều cao của bậc thứ n so với mặt sân là h_n, ta có :

$$h_n = 0{,}5 + n.0{,}18.$$

b) Chiều cao mặt sàn tầng hai so với mặt sân là

$$h_{21} = 0{,}5 + 21.0{,}18 = 4{,}28 \text{ (m)}.$$

5. Tính tổng $1 + 2 + 3 + ... + 12 = 78.$