§3 ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC
(3 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Chứng minh được công thức tính đạo hàm của các hàm số

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x.$$

Áp dụng thành thạo các quy tắc đã biết để tính đạo hàm của các hàm số dạng $y = \sin u$, $y = \cos u$, $y = \tan u$, $y = \cot u$.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Giới hạn của $\dfrac{\sin x}{x}$

Định lí 1 về giới hạn của $\dfrac{\sin x}{x}$ khi $x \to 0$ là một định lí quan trọng.

Cần phải luyện tập để học sinh biết cách áp dụng định lí này để giải đúng các bài tập.

Kết quả của **1** là

$$\frac{\sin 0{,}01}{0{,}01} \approx 0{,}9999833334 \ ; \ \frac{\sin 0{,}001}{0{,}001} \approx 0{,}9999998333.$$

Chẳng hạn, nên lấy các ví dụ dạng sau :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \ ;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Cũng nên lưu ý học sinh tránh sự ngộ nhận rất dễ xảy ra như sau :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Sai lầm trên do không thấy rằng khi $x \to 0$ thì $\left|\frac{1}{x}\right| \to +\infty$ nên không thể áp dụng Định lí 1.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Định lí 2

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Để chứng minh Định lí 2, ta áp dụng công thức

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

và áp dụng quy tắc tính đạo hàm.

3. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Hoạt động **2** chuẩn bị cho chứng minh Định lí 3 :

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Trước hết cần nhắc lại công thức

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \; ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Sau đó áp dụng công thức $(\sin u)' = u'\cos u$, ta được :

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)'\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Toàn bộ hoạt động trên được học sinh tiến hành dưới sự dẫn dắt của giáo viên.

4. Đạo hàm của các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

Kết quả của **3** : Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'.\cos x - \sin x.(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Nhờ định lí đạo hàm của một thương và các định lí 2, 3, ta có thể dễ dàng chứng minh được các kết quả sau :

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ ; } (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Giáo viên nên hướng dẫn để học sinh tự tìm thấy các kết quả trên.

Kết quả của **4** : Với $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)'}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

C. BÀI TẬP

1. a) $y' = \dfrac{3}{(5x-2)^2}$; b) $y' = \dfrac{23}{(7-3x)^2}$;

c) $y' = \dfrac{-2(2x^2-3x-9)}{(3-4x)^2}$; d) $y' = \dfrac{-10x^2-6x+9}{x^2(x-3)^2}$.

2. a) $(-1\,;\,1) \cup (1\,;\,3)$; b) $(-\infty\,;\,-3] \cup [1\,;\,+\infty)$;

c) $\left(\dfrac{1-\sqrt{19}}{2}\,;\,\dfrac{1+\sqrt{19}}{2}\right)$.

3. a) $y' = 5\cos x + 3\sin x$; b) $y' = -\dfrac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$;

c) $y' = \cot x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$; d) $y' = (x\cos x - \sin x)\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;

e) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\tan x}}$; f) $y' = \dfrac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

4. a) $y' = -2(2x^3-9x^2+1) + (6x^2-18x)(9-2x)$;

b) $y' = \left(\dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x^3}\right)(7x-3) + 7\left(6\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$;

c) $y' = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}}$;

d) $y' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} + \dfrac{2x}{\sin^2 x^2}$;

e) $y' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}\sin\dfrac{x}{1+x}$.

5. $\dfrac{1}{2}$.

6. a) $y' = 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x + 6\sin x\cos^3 x - 6\sin^3 x\cos x$

$$= 6\sin x\cos x(\sin^4 x - \cos^4 x) - 6\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$= 3\sin 2x(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) - 3\sin 2x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0.$$

Vậy $y' = 0$ với mọi x, tức là y' không phụ thuộc vào x.

b) Vì côsin của hai cung bù nhau thì đối nhau cho nên

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right),$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right).$$

Do đó

$$y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) - 2\sin^2 x$$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - 2\sin^2 x.$$

Từ đó suy ra :

$$y' = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - 4\sin x\cos x$$

$$= 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right) - 2\sin 2x$$

$$= 2\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}\sin 2x - \sin\frac{2\pi}{3}\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}\sin 2x - \sin 2x\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \sin 2x\right) = 0.$$

Vậy $y' = 0$ với mọi x, tức là y' không phụ thuộc vào x.

7. a) $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x + 5$,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1. \qquad (1)$$

Đặt $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ $\left(\varphi \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow \sin\varphi = \frac{4}{5}$, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \sin x\cos\varphi - \cos x\sin\varphi = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \varphi) = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \varphi + \frac{\pi}{2} + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $f'(x) = -\cos(\pi + x) - \sin\left(\pi + \frac{x}{2}\right) = \cos x + \sin\frac{x}{2}$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = -\cos x \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \pi - x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi - k4\pi \\ x = \pi + k\frac{4\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Giáo viên có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác, từ đó thấy tập nghiệm $\{\pi + k\frac{4\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\}$ chứa tập nghiệm $\{\pi - k4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Vì vậy, có thể kết luận nghiệm của phương trình là $x = \pi + k\frac{4\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$ (giáo viên có thể giải thích cho học sinh điều này để viết gọn nghiệm của phương trình).

8. a) $(-\infty\,;0) \cup (2\,;+\infty)$; b) $(-\infty\,;0) \cup (1\,;+\infty)$.