§3 HÀM SỐ LIÊN TỤC (2 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

– Biết khái niệm hàm số liên tục tại một điểm và vận dụng định nghĩa vào việc nghiên cứu tính liên tục của hàm số.

– Biết định nghĩa và tính chất của hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn, ... (đặc biệt là đặc trưng hình học của nó) và các định lí nêu trong SGK. Biết vận dụng chúng vào nghiên cứu tính liên tục của các hàm số và sự tồn tại nghiệm của phương trình dạng đơn giản.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm

Kết quả của **1** :

a) $f(1) = 1 = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $g(1) = 1$ nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là một đường liền nét ; đồ thị hàm số $y = g(x)$ là đường không liền nét mà bị đứt quãng tại điểm có hoành độ $x = 1$.

Khái niệm hàm số liên tục tại một điểm được đưa vào theo con đường quy nạp. Hoạt động **1** cho phép đề cập khái niệm này trên hai phương diện số và đồ thị. Mục đích vẫn là hình thành ở học sinh biểu tượng ban đầu về hàm số liên tục tại một điểm. Qua hoạt động, ta mong muốn học sinh phát hiện ra các thuộc tính bản chất của khái niệm này và nêu lên được một phác thảo định nghĩa tổng quát. Từ đó đi tới định nghĩa chính thức như trong SGK.

Vì hạn chế thời gian, trong **1** SGK chỉ đưa vào hai trường hợp : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ và không tồn tại $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Để bước quy nạp hoàn hảo hơn, tuỳ tình hình lớp học mà giáo viên có thể bổ sung vào hoạt động **1** một hàm số thứ ba $y = h(x)$ thoả mãn : tồn tại $h(1)$ và $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ nhưng $\lim\limits_{x \to 1} h(x) \neq h(1)$.

Để tiết kiệm thời gian và tập trung hơn vào mục tiêu của bài học, nên tính đến một số gợi ý sau :

– Có thể xem hoạt động **1** như một bài tập về nhà mà học sinh được yêu cầu làm trước khi giáo viên thực hiện bài giảng về hàm số liên tục.

– Trong giờ lên lớp, không nên yêu cầu học sinh trình bày đầy đủ cách giải bài tập này (ngay cả khi bài tập được yêu cầu làm tại lớp), mà nên tập trung phân tích so sánh các kết quả đạt được trong câu 1, đồng thời đối với cả hai hàm số đã cho.

Muốn vậy, có thể lập một bảng cho phép trình bày đầy đủ các kết quả. Vấn đề là điền kết quả chính xác mà học sinh tìm được vào các ô trống. Việc phân tích so sánh các kết quả trình bày trong bảng sẽ cho phép học sinh nêu lên được phác thảo của định nghĩa tổng quát.

Giáo viên cũng có thể chuẩn bị trước bảng này ở nhà (với đầy đủ các thông tin), chẳng hạn trên giấy khổ rộng và treo lên trước lớp sau khi đã kiểm tra các kết quả giải câu 1 mà học sinh tìm được.

Lưu ý : Định nghĩa khái niệm hàm số liên tục tại một điểm có thể được phát biểu dưới các dạng khác như sau :

– *Hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 được gọi là liên tục tại x_0 nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

– *Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Đôi khi để ưu tiên tính sư phạm, một số SGK trước đây còn phát biểu định nghĩa dưới dạng sau đây.

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ được gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in (a\ ;\ b)$ nếu thoả mãn đồng thời ba điều kiện sau :

– *Tồn tại $f(x_0)$;*

– *Tồn tại* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *;*

– $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Các cách phát biểu trên đều tương đương với nhau. Tuy nhiên, các tác giả đã chọn định nghĩa như trong SGK vì các lí do sau :

– Theo quy định của chương trình, khái niệm lân cận không được đưa vào SGK.

– Cách phát biểu thứ hai quá ngắn gọn, không nêu rõ bản chất của hàm số $y = f(x)$.

– Cách phát biểu thứ ba có ưu điểm là làm rõ các thuộc tính bản chất của khái niệm hàm số liên tục tại một điểm, nhưng quá dài dòng. Hơn nữa, việc đưa vào điều kiện "Tồn tại $f(x_0)$" không được tự nhiên vì giả thiết hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và $x_0 \in (a\ ;\ b)$ đã bao hàm sự tồn tại của $f(x_0)$.

2. Định lí 1 và Định lí 2

SGK không đưa vào khái niệm "Hàm số liên tục trên một tập hợp bất kì". Do đó, trong Định lí 1, ta nói : "Hàm số phân thức hữu tỉ và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng", mà không nói "liên tục trên tập xác định". Thực ra, để đơn giản trong thực hành, có thể đưa vào định lí : "Các hàm số sơ cấp cơ bản liên tục trên mọi khoảng (đoạn hay nửa khoảng) nằm trong tập xác định của nó". Tuy nhiên, điều này kéo theo phải đưa vào khái niệm hàm số sơ cấp cơ bản. Nhưng việc định nghĩa chính xác khái niệm này cũng khá dài dòng và phức tạp. Vì thế SGK chỉ hạn chế trình bày như trong Định lí 1 và Định lí 2.

Các định lí được thừa nhận, không chứng minh. Do vậy, nên tập trung vào phân tích để học sinh hiểu nội dung định lí và đặc biệt là vận dụng vào giải các bài toán thông qua các ví dụ, mà không nên bắt học sinh chép lại nội dung định lí.

Kết quả của **2** : Thay số 5 bởi số 2.

3. Định lí 3

Như đã nói trong phần trước, SGK không đề cập định lí giá trị trung gian tổng quát, mà chỉ đưa vào một trường hợp đặc biệt của nó (Định lí 3).

Định lí này được thừa nhận không chứng minh, do đó hoạt động **3** không chỉ có mục đích tạo động cơ cho việc xuất hiện định lí, mà còn cho phép đưa ra những giải thích cho định lí này nhờ vào ghi nhận trực quan hình học.

Vì thế, trong hoạt động **3**, ta chỉ mong muốn học sinh biết dùng các minh hoạ hình học để nhận xét các câu trả lời đã cho, chứ không đòi hỏi những chứng minh chặt chẽ. Vả lại, cũng khó có học sinh nào đưa ra được một chứng minh như vậy.

Trong câu trả lời thứ ba của bạn Tuấn, rõ ràng $y^2 = x$ không phải là một hàm số biến x. Nhưng các tác giả vẫn cố tình đưa vào, vì trong thực tế không ít học sinh đã xem các đường cônic là đồ thị của các hàm số. Như vậy, câu trả lời thứ ba sẽ là dịp sửa đổi quan niệm sai lầm này, đồng thời nó cũng góp phần làm cho cuộc tranh luận của học sinh khi tiến hành hoạt động **3** sôi nổi hơn.

Kết quả của **3** : Bạn Lan trả lời đúng.

Kết quả của **4** là : Chọn $a = 1{,}1$ và $b = 1{,}9$.

4. Một vài lưu ý khác

Vì lí do giảm tải, SGK hạn chế đưa vào các bài toán liên quan tới các hàm số được cho bằng nhiều biểu thức giải tích khác nhau, đặc biệt là các bài toán chứa tham số (bài toán biện luận theo tham số tính liên tục của hàm số, ...). Do vậy, giáo viên không nên khai thác quá mức các hàm số dạng này.

Mặt khác, theo phân phối của chương trình, nội dung "Hàm số liên tục" được giảng dạy chỉ trong 2 tiết. Vì thế, phần bài tập của SGK chỉ hạn chế ở mức độ vừa phải (6 bài tập).

Cố gắng dùng nhiều ví dụ minh hoạ để học sinh nắm được đặc trưng hình học của hàm số liên tục trên một khoảng (đồ thị là một đường liền trên khoảng đó).

C. BÀI TẬP

1. $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 3$.

2. a) $g(x)$ không liên tục tại $x_0 = 2$; b) 12.

3. a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$.

4. a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty ; -3)$, $(-3 ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$;

b) Hàm số $y = g(x)$ liên tục trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

5. Ý kiến đúng.

Giả sử ngược lại $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại x_0. Đặt $h(x) = f(x) + g(x)$. Ta có $g(x) = h(x) - f(x)$.

Vì $y = h(x)$ và $y = f(x)$ liên tục tại x_0 nên hiệu của chúng là hàm số $y = g(x)$ phải liên tục tại đó. Điều này trái với giả thiết là $y = g(x)$ không liên tục tại x_0.

6. b) *HD* : Xét hàm số $f(x) = \cos x - x$ trên $\mathbb{R}$ và hai số 0 và 1.

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Ta có thể định nghĩa khái niệm hàm số liên tục tại một điểm theo ngôn ngữ ε, δ như sau :

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ gọi là liên tục tại x_0 thuộc khoảng $(a\ ;\ b)$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\forall x \in (a\ ;\ b)$ mà $0 < |x - x_0| < \delta$, ta có $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

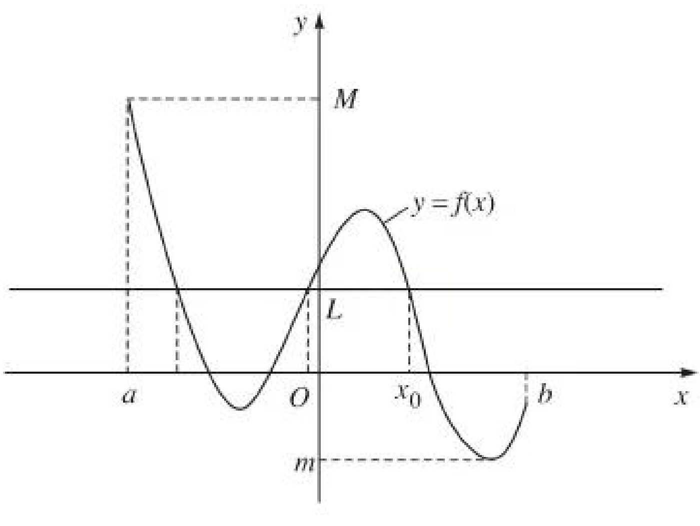
2. Một số tính chất khác của hàm số liên tục

• *Định lí 1.* Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì nó đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn đó.

• *Định lí 2. (Định lí giá trị trung gian)*

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số đó trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Khi đó, với mỗi số L thoả mãn $m \leq L \leq M$, luôn tồn tại ít nhất một số $x_0 \in [a\ ;\ b]$ sao cho $f(x_0) = L$.

• Minh hoạ hình học hai định lí trên (h.19).



Hình 19