

§3

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP (8 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Giúp học sinh biết cách giải các phương trình lượng giác mà sau một vài phép biến đổi đơn giản có thể đưa về phương trình lượng giác cơ bản. Đó là phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác và các phương trình có thể đưa về phương trình dạng đó và phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Đối với chương trình chuẩn, chúng tôi có nêu thêm phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác, đó là loại phương trình có thể đưa ngay về phương trình lượng giác cơ bản.

Kết quả của 1 là :

- $\sin x = \frac{3}{2} > 1$ nên phương trình vô nghiệm.
- $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

II – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Định nghĩa và cách giải

Việc giải các phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác gồm ba bước :

Bước 1 : Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ t và đặt điều kiện cho t (nếu có).

Bước 2 : Giải phương trình bậc hai theo t và kiểm tra điều kiện để chọn nghiệm t .

Bước 3 : Giải phương trình lượng giác cơ bản theo mỗi nghiệm t nhận được.

Vì phương pháp giải khá đơn giản nên cho học sinh tự giải trong hoạt động 2 rồi sau đó tóm tắt lại thành các bước giải như đã nêu ở trên. Cuối cùng, giáo viên làm mẫu lại theo ví dụ.

Kết quả của 2 là :

- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; $\cos x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Phương trình vô nghiệm do $\Delta' = -6 < 0$.

2. Phương trình đưa về dạng phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Có nhiều phương trình lượng giác có thể đưa về phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác. SGK giới thiệu ba loại đơn giản nhất : Bản thân phương trình đã cho chưa phải là một phương trình bậc hai của một hàm số lượng giác, nhưng chỉ qua một phép biến đổi đơn giản, ta có ngay một phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

Trong ba loại này, loại thứ ba (Ví dụ 8, SGK) thường có một tên trong các sách khác nhau : vế trái của phương trình này được gọi là có dạng *đẳng cấp bậc hai* đối với $\sin x$ và $\cos x$.

$$\text{Đáp án của } \text{Bài 4} \text{ là } \left[\begin{array}{l} \sin 6x = 1 \\ \sin 6x = \frac{1}{3} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{1}{6} \arcsin \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} \arcsin \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3} \end{array} \right] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

III – PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $a\sin x + b\cos x = c$

Đối với phương trình $a\sin x + b\cos x = c$, SGK trình bày công thức biến đổi $a\sin x + b\cos x$ trước khi giải, rồi áp dụng công thức này để đưa về phương trình lượng giác cơ bản như trong Ví dụ 9.

$$\begin{aligned} \text{Đáp án của } \text{Bài 6} : \quad & \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{array} \right] \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

C. BÀI TẬP

$$1. \quad \sin x(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array} \right]$$

2. a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi. \end{cases}$

b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x(1 + \sqrt{2}\cos 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi. \end{cases}$$

3. a) $\sin^2 \frac{x}{2} - 2\cos \frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 1 \\ \cos \frac{x}{2} = -3. \end{cases}$

Đáp số': $x = k4\pi.$

b) $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,$

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi, x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi.$$

c) $\begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi. \end{cases}$

d) Đặt $t = \tan x$, ta được phương trình $t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2. \end{cases}$

$$\text{Đáp số': } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-2) + k\pi.$$

4. a) Ta thấy những giá trị của x mà $\cos x = 0$ không nghiệm đúng phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được phương trình

$$2\tan^2 x + \tan x - 3 = 0.$$

$$\text{Đáp số': } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi.$$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan 3 + k\pi.$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-5) + k\pi.$

d) $2\cos^2 x - 6\sqrt{3} \sin x \cos x - 4\sin^2 x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 x - 6\sqrt{3} \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi. \end{cases}$$

5. a) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi. \end{cases}$

b) $\frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x = 1 \Leftrightarrow \sin(3x - \alpha) = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{với } \cos \alpha = \frac{3}{5}; \sin \alpha = \frac{4}{5}).$$

c) $2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$

$$Dáp số: x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi, \quad x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi.$$

d) $\frac{5}{13}\cos 2x + \frac{12}{13}\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin(2x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow 2x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi \quad (\text{với } \sin \alpha = \frac{5}{13}; \cos \alpha = \frac{12}{13}).$$

6. a) Dáp số: $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

b) $\tan x + \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x = 0.$

$$Dáp số: x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \arctan 3 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$