§4 CẤP SỐ NHÂN (3 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Biết khái niệm cấp số nhân, công thức số hạng tổng quát, tính chất các số hạng và công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Biết sử dụng tính chất và các công thức của cấp số nhân vào giải bài toán : Tìm các yếu tố còn lại khi biết ba trong năm yếu tố u_1, u_n, n, q, S_n.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

I – ĐỊNH NGHĨA

1. Hoạt động **1** : Thông qua một bài toán cổ Ấn Độ để giới thiệu cho học sinh biết một quy tắc để thành lập dãy số, tương ứng với số các hạt thóc trên bàn cờ.

Quy tắc đó là : Các số hạng, từ thứ hai trở đi đều gấp đôi số hạng đứng ngay trước nó.

Số hạt thóc ở sáu ô đầu là 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Nếu giáo viên sử dụng hoạt động **1** để vào bài thì có thể gợi ý cho học sinh thấy rằng có thể khái quát quy tắc trên bằng phép nhân với một số bất kì không đổi.

2. Khi giới thiệu về định nghĩa cấp số nhân, giáo viên nên lưu ý cho học sinh :

– Số q là không đổi (đặc biệt có thể bằng 0 hoặc bằng 1).

– Ý nghĩa của công thức truy hồi

$$u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Công thức (1) cho phép tính được một số hạng bất kì nếu biết công bội q và số hạng đứng ngay trước nó hoặc ngay sau nó. Từ công thức (1) có thể tính được công bội q nếu biết hai số hạng liên tiếp :

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Tuy nhiên, công thức truy hồi không cho phép tính được ngay một số hạng khi biết chỉ số của nó.

Ví dụ 1 tuy đơn giản, song giáo viên nên chú ý rèn luyện cách trình bày cho học sinh. Cách trình bày như SGK đã thể hiện đúng định nghĩa vừa nêu.

II – SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

1. Hoạt động **2** yêu cầu học sinh trở lại với hoạt động **1**, trong đó phải tính số hạt thóc ở ô thứ 11. Có hai cách tính :

Cách 1 : Viết tiếp để có số hạt thóc ở các ô thứ 7 trở đi cho đến ô thứ 11.

Cách 2 : Viết số các hạt thóc ở sáu ô đầu dưới dạng $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$.

Từ đó nhận xét về quan hệ giữa số chỉ thứ tự của ô với số mũ của luỹ thừa với cơ số 2 để có số hạt thóc ở ô thứ 11 là 2^{10}.

2. SGK đã nêu công thức $u_n = u_1q^{n-1}$ với $n \geq 2$ mà không chứng minh, vì nếu sử dụng phương pháp quy nạp thì việc chứng minh không quá khó khăn. Tuy nhiên cần đặc biệt quan tâm đến quan hệ giữa số n chỉ thứ tự với số mũ của luỹ thừa với cơ số q.

3. Các ví dụ

Ví dụ 2 áp dụng trực tiếp công thức (2) của SGK.

Ví dụ 3 cần chú ý rằng khi phân đôi, tế bào đầu tiên không còn nữa.

Vì vậy ở câu a) nếu viết số tế bào sau mỗi lần phân chia thành dãy số, ta có

$1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^{10}$.

Song, tất cả số tế bào chỉ là 2^{10} chứ không phải là $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{10}$.

4. Tuy SGK không nêu, song ta cần biết rằng :

Cho một dãy số (u_n) bằng công thức số hạng tổng quát $u_n = u_1q^{n-1}$ với $n \geq 2$, trong đó biết $u_1 = a$, chính là cho một cấp số nhân có $u_1 = a$ và công bội q.

Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$u_{n+1} = u_1 q^n = (u_1 q^{n-1}).q = u_n.q$$

hay $u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in \mathbb{N}^*$ (công thức định nghĩa).

Chú ý vừa nêu cũng áp dụng cho cấp số cộng.

III – TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ NHÂN

1. Hoạt động **3** khá đơn giản, chỉ cần quan sát năm số hạng đầu vừa viết ở câu a), học sinh sẽ trả lời ngay được yêu cầu của câu b) khi phải so sánh u_2^2 với tích $u_1 u_3$ và u_3^2 với tích $u_2 u_4$ để từ đó nêu nhận xét khái quát.

2. SGK đã phát biểu và nêu một cách chứng minh khá ngắn gọn.

Cần chú ý về đẳng thức

$$|u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}} \text{ với } k \geq 2,$$

đây chính là cách phát biểu khác của định lí, đó là :

Trong một cấp số nhân, mỗi số hạng trừ số hạng đầu và cuối, đều có giá trị tuyệt đối là trung bình nhân của hai số hạng đứng kề với nó.

Đặc biệt, nếu các số hạng của cấp số nhân đều dương, thì trong cách phát biểu trên, ta bỏ đi cụm từ "có giá trị tuyệt đối".

Chú ý : Trong cách chứng minh của định lí, nếu ta thay hai số hạng đứng kề với u_k bởi hai số hạng cách đều u_k thì định lí vẫn đúng.

Thật vậy, hai số hạng cách đều u_k là u_{k-p} và u_{k+p} với $p < k$. Do đó

$$u_{k-p} = u_1.q^{k-p-1},$$

$$u_{k+p} = u_1.q^{k+p-1},$$

suy ra $$u_{k-p}.u_{k+p} = u_1^2.q^{2(k-1)} = (u_1.q^{k-1})^2 = u_k^2.$$

Đến đây, ta có thể phát biểu định lí một cách tổng quát hơn.

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

1. Hoạt động **4** được giới thiệu thông qua bài toán cổ Ấn Độ.

Yêu cầu của bài toán là học sinh cần viết được tổng các hạt thóc ở 11 ô đầu tiên.

$$S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{10}.$$

Việc tính tổng này không khó, nhưng điều quan trọng hơn là dù học sinh có tính hoặc không tính tổng trên nhưng lại băn khoăn một điều là liệu có cách nào có thể tính nhanh được tổng trên thay cho cách tính tổng của tất cả các số hạng.

2. SGK đã trình bày một cách tìm ra công thức S_n. Ngoài ra, có thể trình bày như sau

$$S_n = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... + u_1q^{n-1} + u_1q^n - u_1q^n$$

$$= u_1 + q(u_1 + u_1q + ... + u_1q^{n-1}) - u_1q^n = u_1(1 - q^n) + q.S_n$$

hay $S_n(1 - q) = u_1(1 - q^n)$, suy ra

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}. \qquad (4)$$

3. Ví dụ 4 giúp để luyện tập về công thức số hạng tổng quát và công thức tính tổng S_n.

4. Về hoạt động 5

Giáo viên cần lưu ý cho học sinh về số các số hạng của tổng S là $n + 1$ chứ không phải là n.

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{1\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right].$$

C. BÀI TẬP

1. Lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ta có :

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{3}{5} . 2^{n+1}\right) : \left(\frac{3}{5} . 2^n\right) = 2$. Vậy $u_{n+1} = u_n . 2 \ \forall n \in N^*$

b) *Đáp số :* $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{1}{2}$;

c) *Đáp số :* $u_{n+1} = u_n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. a) *Đáp số :* $q = 3$.

b) *Đáp số :* $u_1 = \frac{9}{7}$.

c) *Đáp số :* $n = 7$.

3. a) Áp dụng công thức số hạng tổng quát, ta có :

$$u_3 = 3 = u_1 q^2 \text{ và } u_5 = 27 = u_1 . q^4.$$

Vì $27 = (u_1.q^2) . q^2 = 3 . q^2$ nên $q^2 = 9$ hay $q = \pm 3$.

Thay $q^2 = 9$ vào công thức chứa u_3, ta có $u_1 = \frac{1}{3}$.

• Nếu $q = 3$, ta có cấp số nhân : $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27.

• Nếu $q = -3$, ta có cấp số nhân : $\frac{1}{3}$, -1, 3, -9, 27.

b) Ta có $\begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 25 \\ u_1q^2 - u_1 = 50 \end{cases}$ hay

$$\begin{cases} u_1q(q^2 - 1) = 25 & (1) \\ u_1(q^2 - 1) = 50. & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), ta được $50.q = 25$, suy ra $q = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$.

Từ (2) có $u_1 = \dfrac{50}{q^2 - 1} = \dfrac{50}{\frac{1}{4} - 1} = -\dfrac{200}{3}$.

Ta có cấp số nhân : $-\frac{200}{3}, -\frac{100}{3}, -\frac{50}{3}, -\frac{25}{3}, -\frac{25}{6}$.

4. Giả thiết cho

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31 \qquad (1)$$

và

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62.$$

Nhân cả hai vế của (1) với q, ta được :

$$u_1q + u_2q + u_3q + u_4q + u_5q = 31q$$

hay $$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 31q,$$

suy ra $62 = 31.q$ hay $q = 2$.

Vì $S_5 = 31 = \dfrac{u_1(1-2^5)}{1-2}$ nên $u_1 = 1$.

Vậy ta có cấp số nhân : 1, 2, 4, 8, 16, 32.

5. Gọi số dân của tỉnh đó là N.

Sau một năm, số dân tăng thêm là 1,4% N.

Vậy số dân của tỉnh đó vào năm sau là

$$N + 1{,}4\%N = 101{,}4\%\, N.$$

Số dân tỉnh đó sau mỗi năm lập thành một cấp số nhân

$$N,\ \frac{101{,}4}{100}N,\ \left(\frac{101{,}4}{100}\right)^2 N,\ ...$$

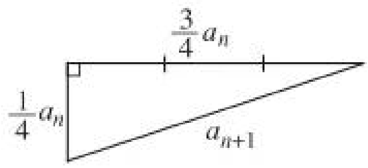
Giả sử $N = 1{,}8$ triệu người thì sau 5 năm số dân của tỉnh là

$$\left(\frac{101{,}4}{100}\right)^5 .1{,}8 \approx 1{,}9 \text{ (triệu)}$$

và sau 10 năm sẽ là $\left(\dfrac{101{,}4}{100}\right)^{10} .1{,}8 \approx 2{,}1$ (triệu).

6. Xét dãy (a_n), ta có $a_1 = 4$.

Giả sử hình vuông C_n có độ dài cạnh là a_n. Ta sẽ tính cạnh a_{n+1} của hình vuông C_{n+1}. Trên Hình 14, ta có :



Hình 14

$$a_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a_n\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a_n\right)^2} = a_n.\frac{\sqrt{10}}{4} \text{ với } n \geq 1.$$

Vậy dãy số (a_n) là cấp số nhân với $a_1 = 4$ và công bội $q = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.