§4 VI PHÂN (1 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

Nắm vững định nghĩa vi phân của một hàm số

$$dy = f'(x)\Delta x$$

hay $$dy = f'(x).dx.$$

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Khái niệm vi phân

Theo quy định của chương trình, trong SGK khái niệm này chỉ được đưa ra một cách nhẹ nhàng, chủ yếu là để có kí hiệu sử dụng sau này.

Trong hoạt động, việc tính $f'(x)\Delta x$ giúp cho học sinh thấy khái niệm vi phân đưa ra ở dưới là một hàm số phụ thuộc vào hai biến là x và Δx.

Để thấy rõ hơn điều đó, giáo viên có thể nêu thêm bài tập dạng :

Tính $f'(x)\Delta x$ với $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$ và $\Delta x = 0{,}01$.

Kết quả của : $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Vậy với $x_0 = 4$ và $\Delta x = 0{,}01$ thì $f'(x_0).\Delta x = \dfrac{1}{2\sqrt{4}}.0{,}01 = 0{,}0025$.

2. Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng

Sau khái niệm vi phân cần giới thiệu công thức

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$(df(x_0) = f'(x_0)\Delta x)$ để hiểu một cách tính gần đúng giá trị của một hàm số tại một điểm.

Trước đây, người ta dùng công thức này như một công cụ để lập các bảng tính gần đúng.

Ngày nay, máy tính bỏ túi giúp tính gần đúng hiệu quả hơn nhiều.

Nên cho học sinh làm một số bài tập ứng dụng trực tiếp công thức trên (như Ví dụ 2, trang 171, SGK).

C. BÀI TẬP

1. a) $\dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

b) $\left[(2x+4)(x^2-\sqrt{x})+(x^2+4x+1)\left(2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]\mathrm{d}x.$

2. a) $\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; b) $\dfrac{(x^2-1)\sin x+2x\cos x}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x.$

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

1. Trong các giáo trình Toán cao cấp, khái niệm vi phân được đưa ra từ nhận xét sau đây.

Giả sử $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên một khoảng K và $x \in K$. Ta dễ dàng chứng minh được các khẳng định sau :

a) *Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x thì số gia hàm số tại x có thể viết*

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x), \quad (1)$$

trong đó $o(\Delta x)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn so với Δx khi $\Delta x \to 0$ (tức là $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$).

Chứng minh. Thật vậy, vì $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nên

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \alpha,$$

trong đó $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$. Từ đó :

$$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x = \alpha\Delta x$$

hay $$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

trong đó $\alpha\Delta x$ là một vô cùng bé bậc cao hơn so với Δx (khi $\Delta x \to 0$).

Vậy $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x)$.

Chú ý : Vì $f'(x)$ không phụ thuộc Δx cho nên $f'(x).\Delta x$ là một đại lượng *tỉ lệ* với Δx.

b) *Nếu số gia Δy tại điểm x có thể viết dưới dạng*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \alpha\Delta x + o(\Delta x), \tag{2}$$

trong đó α không phụ thuộc vào Δx, thì $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x và $f'(x) = \alpha$.

Chứng minh. Thật vậy từ (2) suy ra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha + o(1)$$

($o(1)$ là một vô cùng bé, tức là $\lim\limits_{\Delta x \to 0} o(1) = 0$) và do đó

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha,$$

nghĩa là $y' = f'(x) = \alpha$.

Tóm lại, từ a) và b) ta có :

Điều kiện ắt có và đủ để hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ tại x là có thể phân tích số gia $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ thành tổng của một đại lượng tỉ lệ với Δx và một vô cùng bé bậc cao hơn so với Δx (khi $\Delta x \to 0$). Hơn nữa

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x). \tag{3}$$

Sau khi chứng minh mệnh đề trên, ta thấy trong tổng (3), số hạng $f'(x)\Delta x$ là giá trị chính trong số gia Δy. Người ta gọi số hạng đó là *vi phân* của hàm số $y = f(x)$ và kí hiệu là dy, nghĩa là

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Muốn đưa ra khái niệm vi phân một cách đầy đủ, hợp lí, ta phải làm như trên.

2. Lưu ý rằng theo định lí La-gơ-răng (Xem các giáo trình Giải tích toán học) :

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$ thì tồn tại số $c \in (a ; b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a),$$

ta có thể viết

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x$$

với ξ ở giữa x và $x + \Delta x$. Từ đó

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(\xi)\Delta x.$$

Tuy nhiên, nếu thay $f'(\xi)$ bởi $f'(x_0)$ thì ta có quan hệ gần đúng :

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$