§5 ĐẠO HÀM CẤP HAI (1 tiết)

A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

1. Hiểu rõ định nghĩa và tính thành thạo đạo hàm cấp hai.
2. Hiểu rõ ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai và biết cách tính gia tốc chuyển động trong các bài toán vật lí.

B. NỘI DUNG BÀI HỌC

1. Có thể dễ dàng giới thiệu khái niệm đạo hàm cấp hai thông qua các ví dụ.

   Trong các ví dụ ở hoạt động **1**, tuỳ theo đối tượng, có thể đưa ra yêu cầu tính các đạo hàm cấp 1, 2 của các hàm số đơn giản hơn hoặc phức tạp hơn.

   Chẳng hạn, đơn giản hơn như :

   a) $y = x^2 - 5x + 6$; b) $y = \sin x$;

   hoặc phức tạp hơn như :

   a) $y = \dfrac{3x-4}{1-2x}$; b) $y = \sqrt{2x}$.

   Kết quả của **1** :

   a) $y' = 3x^2 - 10x + 4$; $y'' = 6x - 10$.

   b) $y' = 3\cos 3x$; $y'' = -9\sin 3x$.

   Cũng nên đưa ra bài toán sau :

   Tính đạo hàm cấp n bất kì của hàm số $y = x^2 - 5x + 6$.

   Học sinh sẽ thấy rằng hàm số này có đạo hàm mọi cấp và từ cấp ba trở đi thì mọi đạo hàm đều bằng 0.

2. Một trong những mục đích của việc đưa đạo hàm cấp cao vào chương trình là để áp dụng vào việc học Vật lí.

Hoạt động **2** cho thấy gia tốc trung bình trong một trường hợp cụ thể, chuẩn bị cho việc đưa ra khái niệm gia tốc tức thời.

Kết quả của **2** :

$$v(t) = s' = gt \Rightarrow v(4) = 4g = 39{,}2 \text{ m/s} \; ; \; v(4{,}1) = 40{,}18 \text{ m/s} \; ;$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\frac{1}{2}g(t_1^2 - t_0^2)}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2}g(t_1 + t_0) \approx 39{,}69.$$

Không nên bỏ qua hoạt động này trước khi đưa ra định nghĩa tổng quát của gia tốc trung bình và gia tốc tức thời.

Kết quả của **3** : $s'' = g$.

C. BÀI TẬP

1. a) 622 080.

b) $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9$; $f''(0) = 0$; $f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -\frac{9}{2}$.

2. a) $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$;

b) $y'' = \dfrac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}}$;

c) $y'' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$;

d) $y'' = -2\cos 2x$.

D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

ĐẠO HÀM CẤP CAO

Là sự mở rộng tự nhiên của khái niệm đạo hàm cấp hai. Nhiều bài tập về đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}^*$) rất hay và giúp rèn luyện khả năng chứng minh quy nạp cho học sinh. Nếu có điều kiện, giáo viên nên giới thiệu các loại bài tập này.

1. Khái niệm đạo hàm cấp n

Cho hàm số

$$y = f(x) \qquad (1)$$

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x \in (a\ ;\ b)$. Khi đó tương ứng :

$$f' : (a\ ;\ b) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

cho ta một hàm số mới. Vì hàm số này xây dựng từ hàm số $y = f(x)$, hoàn toàn xác định bởi hàm số đó nên được gọi là đạo hàm của $y = f(x)$.

Tương tự, nếu hàm số

$$y' = f'(x) \qquad (2)$$

có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (c\ ;\ d) \subset (a\ ;\ b)$ thì ta lập được đạo hàm của (2) theo cách trên gọi là đạo hàm cấp hai của $y = f(x)$ và kí hiệu là

$$y'' = f''(x).$$

Tổng quát, nếu hàm số

$$y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$$

có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (e\ ;\ f)$ thì tương ứng

$$f^{(n)} : (e\ ;\ f) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f^{(n)}(x)$$

cho ta đạo hàm của $y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$ gọi là đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$ và kí hiệu là

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho $f(x) = (3x-2)^7$. Tính $f^{(4)}(1)$.

Giải. Ta có

$f'(x) = 7.3(3x-2)^6$, $\qquad f''(x) = 7.6.3^2(3x-2)^5$,

$f'''(x) = 7.6.5.3^3(3x-2)^4$, $\qquad f^{(4)}(x) = 7.6.5.4.3^4(3x-2)^3$,

$f^{(4)}(1) = 7.6.5.4.3^4 = 68040.$

Ví dụ 2. Tính $y^{(n)}$, biết rằng $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Giải. Ta có

$$(x^2 - 3x + 2) = (x - 1)(x - 2) \text{ nên}$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Từ đó

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}.$$

Bằng quy nạp ta tính được :

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}} \; ; \; \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

Vậy $$y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{2x+1}{x^2 + x - 2}$; b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; c) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Giải

a) $y = \dfrac{2x+1}{x^2 + x - 2} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}$

$$\Rightarrow y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right].$$

b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}\right]$

$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

c) $y = \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2} \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^n \dfrac{3n!}{(x-2)^{n+1}}$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng

$$\left.\begin{aligned}(\sin ax)^{(n)} &= a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)\\ (\cos ax)^{(n)} &= b^n \cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\right\} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Giải. Ta có

$$(\sin ax)' = a\cos ax = a\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin ax)'' = a^2 \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \sin\left(ax + 2.\frac{\pi}{2}\right).$$

Giả sử đã có

$$(\sin ax)^{(k)} = a^k \sin\left(ax + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (\sin ax)^{(k+1)} = a^{k+1} \cos\left(ax + k\frac{\pi}{2}\right) = a^{k+1} \sin\left[\left(ax + k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= a^{k+1} \sin\left(ax + (k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Vậy $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh tương tự, ta được

$$(\cos bx)^{(n)} = b^n \cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 5. Tính $y^{(n)}$, biết $y = \sin 5x \cos 2x$.

Giải. Ta có

$$y = \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x)$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{1}{2}\left[7^n \sin\left(7x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Ví dụ 6. Cho $y = x^2 \sin x$. Tìm $y^{(25)}$.

Giải. Áp dụng công thức Lai-bơ-nit (Leibnitz)

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + ... + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

và chú ý rằng

$$(x^2)^{(k)} = 0 \text{ với } k \geq 3,$$

ta được

$$y^{(25)} = \left[(\sin x).x^2\right]^{(25)} = (\sin x)^{(25)}x^2 + 25(\sin x)^{(24)}(x^2)' +$$

$$+\frac{25.24}{2}(\sin x)^{(23)}(x^2)''.$$

Do đó

$$y^{(25)} = x^2 \sin\left(x + 25\frac{\pi}{2}\right) + 50x\sin\left(x + 24\frac{\pi}{2}\right) + 600\sin\left(x + 23\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y^{(25)} = (x^2 - 600)\cos x + 50x\sin x.$$

Ví dụ 7. Cho $y = (1 - x^2)\cos x$. Tìm $y^{(2n)}$.

Giải. Ta có

$$y^{(2n)} = (\cos x)^{(2n)}(1 - x^2) + C_{2n}^1(\cos x)^{(2n-1)}(1 - x^2)'$$

$$+ C_{2n}^2(\cos x)^{(2n-2)}(1 - x^2)''$$

$$= (1 - x^2)\cos(x + n\pi) - 4nx\cos\left(x + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$- 2.\frac{2n(2n-1)}{2}\cos\left(x + (2n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (-1)^n(1 - x^2)\cos x - 4nx\cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + n\pi)\right)$$

$$-(-1)^{n-1}(4n^2 - 2n)\cos x$$

$$= (-1)^n \cos x.(4n^2 - 2n + 1 - x^2) - 4nx\sin(x + n\pi)$$

$$= (-1)^n(4n^2 - 2n + 1 - x^2)\cos x - (-1)^n 4nx\sin x.$$

Vậy $y^{(2n)} = (-1)^n\left[(4n^2 - 2n + 1 - x^2)\cos x - 4nx\sin x\right]$.

Ví dụ 8. Tính $y^{(10)}$, biết $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$.

Giải. Từ $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$, ta có :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} ;$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{(\sqrt{x})'}{x}\right) = (-1)\frac{1}{2^2}\frac{1}{x\sqrt{x}} ;$$

$$y''' = (-1)^2\frac{1}{2^3}\frac{3}{x^2\sqrt{x}} ;$$

$$y^{(4)} = (-1)^3\frac{1}{2^4}.\frac{3.5}{x^3\sqrt{x}} ;$$

...

$$y^{(10)} = (-1)^9\frac{1}{2^{10}}.\frac{3.5.7.9.11.13.15.17}{x^9\sqrt{x}} ;$$

$y^{(10)} = -\dfrac{1}{2^{10}}.\dfrac{17!!}{x^9\sqrt{x}}$; ở đây kí hiệu 1.3.5.7.9.11.13.15.17 = 17!! $(x > 0)$.

Ví dụ 9. $y = \sin x\sin 2x\sin 3x$. Tìm $y^{(10)}$.

Hướng dẫn. Tách thành tổng rồi tìm đạo hàm dần từng bậc.

Đáp số : $y^{(10)} = -2^8\sin 2x - 2^{18}\sin 4x + 2^8.3^{10}\sin 6x$.

Ví dụ 10. $y = x\cos 2x$. Tìm $y^{(10)}$.

Hướng dẫn. Áp dụng công thức Lai-bơ-nít.

Đáp số : $y^{(10)} = -1024(x\cos 2x + 5\sin 2x)$.