# §5 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ (2 tiết)

## A. MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU

– Hình thành khái niệm xác suất của biến cố.

– Hiểu và sử dụng được định nghĩa cổ điển của xác suất.

– Biết cách tính xác suất của biến cố trong các bài toán cụ thể, hiểu ý nghĩa của nó.

## B. NỘI DUNG BÀI HỌC

Khái niệm xác suất của biến cố là một khái niệm rất mới đối với học sinh. Vì vậy, nó đã được hình thành dần dần từ Ví dụ 1, trong đó ta có đưa ra khái niệm khả năng, đồng khả năng. Tiếp theo, hoạt động **1** nhằm củng cố thêm ý niệm về lượng hoá khả năng xảy ra biến cố.

Kết quả của hoạt động **1** là :

Khả năng xảy ra của biến cố $B$ và $C$ là như nhau (cùng bằng 2).

Khả năng xảy ra của biến cố $A$ gấp đôi khả năng xảy ra của biến cố $B$ hoặc biến cố $C$.

Xác suất của một biến cố là một số được đưa ra để đánh giá khả năng xảy ra của biến cố đó. Do đó, biến cố có xác suất gần 1 hay xảy ra hơn còn biến cố có xác suất gần 0 thường hiếm xảy ra.

Có nhiều định nghĩa xác suất, định nghĩa xuất hiện sau là mở rộng định nghĩa trước nhưng định nghĩa xác suất bằng tiên đề là đầy đủ nhất. Tuy vậy, trong giáo trình này, ta chỉ dừng lại ở định nghĩa cổ điển của xác suất, trong đó tính hữu hạn của không gian mẫu và tính đồng khả năng của các kết quả là những yêu cầu cần thiết. Tuy định nghĩa rất đơn giản nhưng thực hành lại rất khó. Nó đòi hỏi học sinh phải có kiến thức về đại số tổ hợp khá vững vàng để đếm $n(A)$ và $n(\Omega)$.

Tính đồng khả năng của các kết quả được nhận biết dựa vào tính ngẫu nhiên của sự lựa chọn, tính đối xứng hình học, ... mà thường được giả thiết từ đầu.

Chẳng hạn, đồng tiền cân đối và đồng chất được gieo ngẫu nhiên thì hai mặt đồng khả năng xuất hiện hay lấy ngẫu nhiên $k$ viên bi từ $n$ viên bi thì các kết quả là các tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử đồng khả năng xuất hiện.

Để tính xác suất của các biến cố, ta phải tiến hành các bước sau :

*Bước 1*. Mô tả không gian mẫu. Kiểm tra tính hữu hạn của $\Omega$, tính đồng khả năng của các kết quả.

*Bước 2*. Đặt tên cho các biến cố bằng các chữ cái $A$, $B$, ...

*Bước 3*. Xác định các tập con $A$, $B$, ... của không gian mẫu. Tính $n(A)$, $n(B)$, ...

*Bước 4*. Tính $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, $\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}$, ....

Các ví dụ áp dụng định nghĩa để tính xác suất được đưa ra khá nhiều, cần phải trình bày chi tiết cùng với các hình vẽ để học sinh nắm vững công thức và thực hành tính xác suất.

Hoạt động **2** nhằm để học sinh tự chứng minh một số tính chất của xác suất. Nó được giải như sau :

a) Vì $n(\varnothing) = 0$ nên $P(\varnothing) = 0$.

b) Do $0 \leq n(A) \leq n(\Omega)$ nên $0 \leq \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} \leq 1$ hay $0 \leq P(A) \leq 1$.

c) Do $A$, $B$ xung khắc nên $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Vậy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Định nghĩa cổ điển của xác suất có nhiều hạn chế. Nó không thể áp dụng được khi phép thử có vô hạn kết quả hoặc các kết quả không đồng khả năng. Định nghĩa thống kê của xác suất được đưa ra để khắc phục nhược điểm này. Nó cho ta cơ sở để lấy tần suất xuất hiện biến cố làm giá trị gần đúng cho xác suất của biến cố đó. Chú ý rằng định nghĩa cổ điển của xác suất là trường hợp riêng của định nghĩa thống kê xác suất.

## C. BÀI TẬP

**1.** a) $\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$.

b) $A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$ ;

$B = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$.

c) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{11}{36}$.

**2.** a) Vì không phân biệt thứ tự và rút không hoàn lại nên không gian mẫu gồm các tổ hợp chập 3 của 4 số :

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}.$$

b) $A = \{(1, 3, 4)\}$ ;

$B = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.

c) $P(A) = \frac{1}{4}$ ; $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

**3.** Vì một đôi giày có 2 chiếc khác nhau nên bốn đôi giày khác cỡ cho ta 8 chiếc giày khác nhau. Vì chọn ngẫu nhiên 2 chiếc giày từ bốn đôi giày (8 chiếc) nên mỗi lần chọn ta có kết quả là một tổ hợp chập 2 của 8 phần tử. Vậy không gian mẫu gồm

$$n(\Omega) = C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28 \text{ (phần tử)}.$$

Gọi $B$ là biến cố : "Hai chiếc chọn được tạo thành một đôi", ta có $n(B) = 4$.

Vậy

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}.$$

*Trả lời :* Xác suất để hai chiếc chọn được tạo thành một đôi từ bốn đôi giày cỡ khác nhau là $\frac{1}{7}$.

**4.** Không gian mẫu có sáu kết quả đồng khả năng :

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}, n(\Omega) = 6.$$

Kí hiệu $A$, $B$, $C$ lần lượt là các biến cố tương ứng với các câu a), b), c).

Ta thấy phương trình bậc hai $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 8 \geq 0$.

Do đó, ta có :

a) $A = \{b \in \Omega \mid b^2 - 8 \geq 0\} = \{3, 4, 5, 6\}$, $n(A) = 4$. Vậy

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

b) Vì $B = \overline{A}$ nên $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$

c) $C = \{3\}$, $n(C) = 1$, $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6}.$

**5.** Không gian mẫu gồm các tổ hợp chập 4 của 52 (con). Vậy

$$n(\Omega) = C_{52}^{4} = 270\,725.$$

Kí hiệu $A$, $B$, $C$ là các biến cố cần tính xác suất tương ứng với các câu a), b), c).

a) Ta có $n(A) = C_4^4 = 1$, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{270\,725} \approx 0{,}000\,003\,7.$

b) Gọi $B$ là biến cố : "Trong bốn con bài rút ra có ít nhất một con át" thì $\overline{B}$ là biến cố : "Trong bốn con bài rút ra không có con át nào".

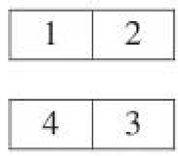
Vì $$n(\overline{B}) = C_{48}^{4} = 194\,580$$

nên $$P(\overline{B}) = \frac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \frac{194\,580}{270\,725} \approx 0{,}7187 \text{ và}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0{,}2813.$$

c) $n(C) = C_4^2.C_4^2 = 36$, $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{36}{270\,725} \approx 0{,}000133.$

**6.** Để xác định, ta đánh số bốn ghế như Hình 10.




*Hình 10*

Không gian mẫu gồm các hoán vị của 4 người.

Vậy $n(\Omega) = 4! = 24$.

Kí hiệu $A$ : "Nam, nữ ngồi đối diện nhau" ;

$B$ : "Nữ ngồi đối diện nhau".

a) Đầu tiên xếp nam ngồi ở ghế ① và ghế ②, có 2 cách. Sau khi nam đã ngồi ở ghế ① và ghế ②, xếp tiếp nữ vào ghế ③ và ghế ④. Có 2 cách.

Hoán vị chỗ ngồi của hai bạn đối diện cho nhau. Có 2 . 2 cách.

Vậy theo quy tắc nhân, ta có số cách là

$$2\,.\,2\,.\,2\,.\,2 = 16 \text{ (cách)}.$$

Như vậy, $n(A) = 16$ và $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$.

b) Vì có 2 nam và 2 nữ xếp vào 4 ghế như Hình 10 nên khi nữ ngồi đối diện nhau thì lập tức nam cũng ngồi đối diện nhau. Mặt khác, các cách xếp chỉ có thể là nam, nữ ngồi đối diện hoặc nữ đối diện nhau hoặc nam đối diện nhau. Do đó trong trường hợp này $B = \overline{A}$. Vậy

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}.$$

**7.** Đánh số các quả cầu trong mỗi hộp từ 1 đến 10 sao cho các quả cầu trắng trong hộp 1 được đánh số từ 1 đến 6 và các quả cầu trắng trong hộp thứ hai được đánh số từ 1 đến 4.

a) Ta có $A = \{(i, j) \mid 1 \le i \le 6\,;\, 1 \le j \le 10\}$ ;

$B = \{(i, j) \mid 1 \le i \le 10\,;\, 1 \le j \le 4\}$.

Từ đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6.10}{10.10} = \dfrac{6}{10}$ ;

$$\mathrm{P}(B) = \frac{10.4}{10.10} = \frac{4}{10}$$

và $AB = \{(i, j) \mid 1 \le i \le 6\,;\, 1 \le j \le 4\}$,

$$\mathrm{P}(AB) = \frac{6.4}{10.10} = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B).$$

Từ đó $A$ và $B$ độc lập.

b) Kí hiệu biến cố $C$ : "Lấy được hai quả cùng màu".

Ta có $C = A.B \cup \overline{A}.\overline{B}$. Do hai biến cố $AB$, $\overline{A}.\overline{B}$ xung khắc và $A$, $B$ là hai biến cố độc lập nên

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\overline{A}\,\overline{B}) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) + P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$$= \frac{24}{100} + \frac{24}{100} = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}.$$

c) Do biến cố : "Lấy được hai quả khác màu" là $\overline{C}$ nên xác suất cần tìm là

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}.$$

## D. KIẾN THỨC BỔ SUNG

### I. Định nghĩa tiên đề của xác suất

#### 1. Định nghĩa

*Giả sử $\Omega$ là không gian mẫu của phép thử nào đó, $\Omega \neq \varnothing$.*

*Lấy một họ $\mathcal{F}$ nào đó gồm các tập con của $\Omega$ thoả mãn các điều kiện sau :*

A1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

A2) $\forall A \in \mathcal{F}, \ \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,

A3) $A_k \in \mathcal{F}$ với $k = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup\limits_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}$.

*$\mathcal{F}$ được gọi là một $\sigma$ - đại số.*

*Giả sử* P *là một ánh xạ từ $\mathcal{F}$ vào $\mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện :*

P1) $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \geq 0$,

P2) $P(\Omega) = 1$,

P3) $A_k \in \mathcal{F}, k = 1, 2, \ldots$ đôi một không giao nhau thì

$$P\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = \sum_{k \geq 1} P(A_k).$$

*Bộ ba ($\Omega$, $\mathcal{F}$, P), trong đó $\mathcal{F}$ thoả mãn các điều kiện* A1) $\to$ A3) *;* P *thoả mãn các điều kiện* P1) $\to$ P3), *được gọi là không gian xác suất.*

Tập $A \in \mathcal{F}$ được gọi là *biến cố*, $P(A)$ được gọi là *xác suất của biến cố A*.

*Các tính chất* A1, A2, A3, P1, P2, P3 là các tiên đề *của lí thuyết xác suất*.

#### 2. Mô hình rời rạc của hệ tiên đề

***a) Mô hình rời rạc của lí thuyết xác suất***

Giả sử $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ là tập hợp bất kì có không quá đếm được các phần tử.

Lấy $\mathcal{F}$ là tập hợp gồm mọi tập con của Ω.

Lấy một dãy số không âm $p_1, p_2, \ldots$ thoả mãn :

$$p_1 + p_2 + \ldots = 1.$$

Đặt $\mathrm{P}(A) = \sum\limits_{k:\omega_k \in A} p_k,\ A \subset \Omega.$ (1)

Khi đó (Ω, $\mathcal{F}$, P) thoả mãn các tiên đề của lí thuyết xác suất.

Không gian xác suất đó được gọi là mô hình rời rạc của lí thuyết xác suất.

***b) Mối liên quan giữa định nghĩa cổ điển của xác suất và định nghĩa tiên đề của xác suất***

Đặc biệt, giả sử $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ là tập hữu hạn.

Lấy $\mathcal{F}$ là tập hợp mọi tập con của Ω ; $A \in \mathcal{F}$ được gọi là biến cố.

Lấy $$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}. \quad (2)$$

*Khi đó, theo* (1), $$\mathrm{P}(A) = \sum_{k:\omega_k \in A} p_k = n(A).\frac{1}{n} = \frac{n(A)}{n}. \quad (3)$$

Đây chính là *định nghĩa cổ điển của xác suất*.

Hơn nữa, từ (2) và (3) suy ra

$$\mathrm{P}(\{\omega_1\}) = \ldots = \mathrm{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}.$$

Điều đó nói rằng các kết quả của phép thử là đồng khả năng xuất hiện.

*Như vậy, định nghĩa cổ điển của xác suất là trường hợp riêng của định nghĩa tiên đề của xác suất.*

## II. Luật số lớn và định nghĩa thống kê của xác suất

### 1. Luật mạnh số lớn của Côn-mô-gô-rôv

Luật số lớn là một trong ba viên ngọc quý của lí thuyết xác suất.

*Luật yếu số lớn* đã được Béc-nu-li phát hiện và được công bố năm 1713 dưới dạng đặc biệt.

Gần hai trăm năm sau (1909), Bo-ren đã khẳng định rằng với các giả thiết trong luật số lớn của Béc-nu-li có thể làm mạnh hơn kết luận và như vậy, ông đã phát minh ra *luật mạnh số lớn*.

Các kết quả của Béc-nu-li và Bo-ren đã được nhiều nhà toán học chú ý và đã mở rộng chúng theo nhiều hướng khác nhau.

Các kết quả hoàn thiện nhất được Viện sĩ Côn-mô-gô-rôv đạt được vào những năm 20 và 30 của thế kỉ XX. Côn-mô-gô-rôv đã làm mạnh hơn kết luận trong định lí của Khin-chin và nhận được *luật mạnh số lớn* phát biểu như sau :

*Nếu $X_1, X_2, \ldots$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối có kì vọng a hữu hạn thì khi $n \to +\infty$*

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to a \text{ (hầu chắc chắn).}$$

**2. Mối liên quan giữa định nghĩa thống kê của xác suất và định nghĩa tiên đề của xác suất**

Đặc biệt, giả sử $A$ là biến cố liên quan đến phép thử. Khi đó nếu phép thử đó được lặp lại một cách độc lập $n$ lần thì tần suất

$$\frac{n(A)}{n} \to \mathrm{P}(A) \text{ hầu chắc chắn, khi } n \to +\infty.$$

Từ đó, khi $n$ khá lớn

$$\frac{n(A)}{n} \approx \mathrm{P}(A).$$

Đó chính là cơ sở toán học của định nghĩa thống kê của xác suất.

Định nghĩa thống kê của xác suất xuất hiện trước định nghĩa tiên đề.

## III. Vấn đề chọn hoàn lại và không hoàn lại

### 1. Định nghĩa

Giả sử $A$ là một tập hữu hạn.

***a) Lựa chọn có hoàn lại***

*Chọn lần lượt từng phần tử của tập hợp A một số lần sao cho mỗi lần lấy ra một phần tử để quan sát thì phần tử đó lại được hoàn trả lại tập hợp, sau đó mới chọn lần tiếp theo.*

Sự lựa chọn như vậy được gọi là *lựa chọn có hoàn lại*.

***b) Lựa chọn không hoàn lại***

*Chọn lần lượt từng phần tử của tập hợp A một số lần sao cho phần tử đã được chọn ra thì không được hoàn trả lại tập hợp.*

Sự lựa chọn như vậy được gọi là *lựa chọn không hoàn lại*.

**2. Ví dụ**

**Ví dụ.** Từ một hộp chứa $a$ quả cầu trắng, $b$ quả cầu đen lấy lần lượt từng quả $n$ lần. Tính xác suất sao cho trong $n$ quả được lấy có đúng $k$ quả trắng nếu :

a) Sự lựa chọn là không hoàn lại ;

b) Sự lựa chọn là có hoàn lại.

***Giải***

a) Vì sự lựa chọn là không hoàn lại và không phân biệt thứ tự lấy nên kết quả của quá trình lựa chọn là một tập con $n$ phần tử của $a + b$ phần tử (là một tổ hợp chập $n$ của $a + b$ phần tử).

Do đó $n(\Omega) = \mathrm{C}_{a+b}^{n}$ (ở đây phải giả thiết $n \le a + b$).

Kí hiệu $A$ là biến cố : "Trong $n$ quả lấy ra, có đúng $k$ quả cầu trắng" thì

$$n(A) = \mathrm{C}_a^k.\mathrm{C}_b^{n-k} \text{ (ở đây } k \le a,\ n - k \le b).$$

Vậy
$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{C}_a^k\mathrm{C}_b^{n-k}}{\mathrm{C}_{a+b}^{n}}.$$

*Chú ý :* $k$ phải thoả mãn

$$\max\{0, n - b\} \le k \le \min\{n, a\}.$$

b) Vì sự lựa chọn là có hoàn lại nên $n$ lần lựa chọn là $n$ phép thử Béc-nu-li (xem SGK Đại số và Giải tích 11 nâng cao) với biến cố thành công $T$ : "Lấy được quả trắng" và

$$\mathrm{P}(T) = \frac{a}{a+b}.$$

Khi đó theo công thức xác suất nhị thức, ta có :

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{C}_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}. \qquad (2)$$

***Chú ý***

a) Rõ ràng vế phải của (1) và (2) là khác nhau. Nói cách khác, P($A$) thay đổi khi cách lựa chọn thay đổi.

b) Người ta chứng minh được rằng khi $a + b \to +\infty$ mà $\dfrac{a}{a+b} = p$ không đổi thì

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \longrightarrow C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Như vậy nếu $a + b$ khá lớn thì vế phải của (1) và (2) xấp xỉ như nhau, nghĩa là

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \approx C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$