Chương IV (14 tiết)

GIỚI HẠN

I – MỤC TIÊU

– Đưa vào các khái niệm cơ sở của Giải tích (giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số, hàm số liên tục) và qua đó bước đầu hình thành kiểu tư duy toán học gắn liền với sự vô hạn và liên tục.

– Cung cấp một số định lí cơ bản làm công cụ cho việc nghiên cứu giới hạn của dãy số và của hàm số, tính liên tục của hàm số và giải một số bài toán liên quan dạng đơn giản.

– Chuẩn bị những khái niệm và công cụ cơ bản nhất làm cơ sở cho việc nghiên cứu các nội dung sẽ đưa vào sau đó như *Đạo hàm* ở lớp 11, *Khảo sát hàm số* và *Tích phân* ở lớp 12.

II – NỘI DUNG

1. Về mặt hình thức, người ta thường xem việc đưa vào khái niệm giới hạn đánh dấu sự bắt đầu của bộ môn Giải tích. Tuy nhiên, có thể nói, các yếu tố của Giải tích đã xuất hiện rất sớm trong chương trình toán ở trường phổ thông. Đặc biệt, tư tưởng "chuyển qua giới hạn" và kiểu tư duy "vô hạn và liên tục" đã được vận dụng khi định nghĩa và tính độ dài đường tròn như là giới hạn của chu vi đa giác đều nội tiếp, khi gấp đôi mãi số cạnh.

Một cách khái quát, ngoài việc vận dụng các phép toán và quy tắc của Đại số, việc nghiên cứu một cách khoa học và đầy đủ các vấn đề liên quan tới sự vô hạn đòi hỏi phải dùng đến một công cụ tri thức mới. Đó chính là các khái niệm giới hạn và liên tục của Giải tích.

Từ phân tích trên, nghịch lí Zê-nông đã được đưa vào ngay đầu Chương IV với hai mục đích chính sau :

– Làm cho học sinh bước đầu ý thức được về sự hạn chế của các phép toán và quy tắc đại số trong việc giải quyết các vấn đề liên quan tới sự vô hạn.

– Tạo động cơ cho việc đi vào nghiên cứu chương giới hạn. Cụ thể hơn, làm cho học sinh ý thức được về tầm quan trọng của khái niệm giới hạn và do đó có nhu cầu, hứng thú nghiên cứu nó.

Để đạt được hai mục đích này, ngoài nghịch lí Zê–nông, tuỳ theo đối tượng học sinh, giáo viên có thể khai thác thêm một số nghịch lí khác sau đây.

• Nghịch lí "1 = 0".

Xét $$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$$

Ta có

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0. \quad (1)$$

Mặt khác,

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots + (-1 + 1) + \ldots = 1 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : 1 = 0 (!)

• Nghịch lí "−2 là số dương".

Cho $$x = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \ldots \quad (3)$$

Suy ra $$\frac{3}{2}x = \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \ldots \quad (4)$$

x là tổng của các số dương nên $x > 0$. Nhưng, lấy (3) trừ đi (4), ta có $x - \frac{3}{2}x = 1$ hay $x = -2$.

Các nghịch lí trên chỉ ra rằng các phép toán và quy tắc đại số không đủ cho việc nghiên cứu các quy trình vô hạn. Như vậy, nhu cầu tất yếu là khám phá phép toán mới cho phép giải quyết vấn đề.

2. Về khái niệm *giới hạn của dãy số*, chương trình yêu cầu :

– Không dùng ngôn ngữ ε, N để định nghĩa giới hạn của dãy số.

– Thông qua các ví dụ cụ thể để hình thành khái niệm giới hạn 0, từ đó dẫn tới giới hạn khác 0.

Nói cách khác, vấn đề là đưa vào khái niệm giới hạn dãy số mà không trình bày định nghĩa hoàn toàn chính xác. Vả lại, ở cấp độ phổ thông, khi đã không dùng ngôn ngữ ε, N thì khó có định nghĩa nào có thể mô tả đúng bản chất của khái niệm giới hạn.

Trên tinh thần đó, trong sách giáo khoa, khái niệm giới hạn 0 và giới hạn $+\infty$ của dãy số được đưa vào theo con đường quy nạp. Cụ thể, qua các hoạt động, khái niệm được mô tả nhờ vào các ghi nhận trực giác số và trực giác hình học. Sau đó, định nghĩa tổng quát dưới dạng mô tả sẽ được trình bày. Còn các khái niệm giới hạn khác 0 và giới hạn $-\infty$ được định nghĩa qua các khái niệm giới hạn 0 và giới hạn $+\infty$.

Đặc biệt, trong các SGK trước đây, tuỳ trường hợp mà kí hiệu ∞ có thể được hiểu theo nhiều cách khác nhau như $+\infty$, $-\infty$ hay hỗn hợp cả hai. Chẳng hạn :

Với $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 = \infty$, cả hai kí hiệu ∞ được hiểu là $+\infty$;

Với $\lim\limits_{n \to \infty} (-2n) = \infty$, kí hiệu ∞ sau được hiểu là $-\infty$;

Còn với $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n n = \infty$, kí hiệu ∞ sau được hiểu là cả $+\infty$ và $-\infty$.

Tuy nhiên, trong việc khảo sát hàm số ở lớp 12, ta chỉ nghiên cứu tính chất của hàm số ở $+\infty$ hay $-\infty$, chứ không xét chung chung ở vô cực. Ngay ở bậc Đại học, khi xét tập số thực mở rộng, ta cũng bổ sung hai phần tử là $+\infty$ và $-\infty$, mà không sử dụng kí hiệu ∞.

Do vậy, phù hợp với yêu cầu của chương trình, SGK mới không còn dùng khái niệm "Dãy số dần tới vô cực" và viết $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \infty$ như trước đây, mà đưa vào hai khái niệm khác nhau : giới hạn $+\infty$ và giới hạn $-\infty$ $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty,\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty\right)$. Như vậy, SGK sẽ không dùng kí hiệu ∞ chung chung, mà phân biệt một cách rõ ràng $+\infty$ và $-\infty$, đồng thời xem $\pm\infty$ như là giới hạn của dãy số.

Ngược lại, SGK trước đây dùng khái niệm $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \infty$, nhưng lại không coi ∞ là giới hạn của dãy số (u_n), vì lí do ∞ là một kí hiệu chứ không phải là số thực. Điều này thường gây thắc mắc cho giáo viên và học sinh : Vì sao (u_n) không có giới hạn mà lại viết $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \infty$?

Như vậy, theo một số SGK trước đây, ta có $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n n = \infty$. Nhưng với SGK mới, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n n$ không tồn tại.

3. Về khái niệm giới hạn của hàm số, chương trình đòi hỏi định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn dãy số. Điều này cho phép tránh được những khó khăn của học sinh khi sử dụng các định nghĩa theo ngôn ngữ ε, δ.

Mặt khác, cũng như giới hạn của dãy số, SGK đưa vào hai khái niệm phân biệt : giới hạn $+\infty$ và giới hạn $-\infty$.

Chương trình yêu cầu không đưa vào một mục chuyên biệt về *Giới hạn dạng vô định* như trong các SGK trước đây hay SGK nâng cao, với mục đích chủ yếu là giảm tải. Tuy nhiên, nghiên cứu giới hạn không thể tránh khỏi việc tính các giới hạn thuộc dạng vô định. Vì thế, SGK chỉ đưa vào các ví dụ và bài tập dạng đơn giản, nhằm phục vụ cho việc nghiên cứu đạo hàm trong chương sau và khảo sát hàm số ở lớp 12. Do đó, giáo viên không nên khai thác quá sâu các bài tập mà việc khử dạng vô định đòi hỏi các kĩ thuật biến đổi phức tạp. Hơn nữa, nếu yêu cầu học sinh giải các bài tập phức tạp, lắt léo về giới hạn thuộc dạng vô định, thì cũng chỉ có tác dụng rèn luyện kĩ năng biến đổi đại số, chứ chưa hẳn làm cho các em hiểu rõ thêm về giới hạn của hàm số.

Ngoài ra, để phù hợp với quy định của chương trình, SGK không đưa vào định lí về tính duy nhất của giới hạn (của dãy số và của hàm số), định lí về tính bị chặn của dãy số có giới hạn hữu hạn (điều kiện cần để dãy số hội tụ), định lí về giới hạn của dãy số (hàm số) bị kẹp giữa hai dãy số (hàm số) có cùng giới hạn và định lí về giới hạn của dãy số đơn điệu, bị chặn. Điều này cũng phù hợp với tinh thần giảm tải.

4. Đối với hàm số liên tục, theo yêu cầu của chương trình, SGK không đề cập định lí giá trị trung gian tổng quát, mà chỉ đưa vào một trường hợp đặc biệt của nó khi $f(a)\ .\ f(b) < 0$ (Định lí 3). Tuy nhiên, ở cấp độ phổ thông, các bài toán mà việc giải đòi hỏi áp dụng định lí tổng quát, đều có thể chuyển về trường hợp đặc biệt này. Chẳng hạn, có thể chuyển bài toán "Chứng minh phương trình $f(x) = m$ có nghiệm trên khoảng $(a\ ;\ b)$" thành bài toán

"Chứng minh phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a\ ;\ b)$, trong đó $g(x) = f(x) - m$".

5. Đi kèm với SGK là sách bài tập (SBT). Các bài tập trong SBT thường khó và phức tạp hơn. Tuy nhiên, bài tập trong sách này chỉ có mục đích bổ sung cho bài tập trong SGK (nghĩa là không bắt buộc). Do vậy, tuỳ theo trình độ của học sinh ở từng lớp học cụ thể, mà giáo viên có thể không yêu cầu học sinh làm thêm bài tập trong SBT hoặc chỉ yêu cầu với những bài tập phù hợp.