Đề kiểm tra chương III (tham khảo)

ĐỀ SỐ 1 *(45 phút)*

Câu 1. (3 *điểm*) Dùng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng

$$S_n = 1 + 5 + 9 + ... + 4n - 3 = n(2n - 1),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Câu 2. (4 *điểm*) Tìm cấp số cộng (u_n) có năm số hạng, biết

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 7 \\ u_3 + u_4 = 9. \end{cases}$$

Câu 3. (3 *điểm*) Chứng minh dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2}{5}.3^{n-1}$ là cấp số nhân.

Đáp án

Câu 1. (3 *điểm*)

Với $n = 1$, dễ thấy công thức đúng.

Giả sử đã có $S_k = k(2k - 1)$ với $k \geq 1$.

Ta phải chứng minh $S_{k+1} = (k + 1)(2k + 1)$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 + 5 + 9 + ... + 4k - 3 + 4k + 1 \\ &= S_k + 4k + 1 = k(2k - 1) + 4k + 1 = 2k^2 + 3k + 1 \\ &= 2(k + 1)\left(k + \frac{1}{2}\right) = (k + 1)(2k + 1). \end{aligned}$$

Vậy công thức đã được chứng minh.

Câu 2. (4 *điểm*) Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_1 + 4d = 7 \\ u_1 + 2d + u_1 + 3d = 9 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 2u_1 + 4d = 7 \\ 2u_1 + 5d = 9. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được $d = 2$ và $u_1 = -\frac{1}{2}$.

Vậy cấp số cộng cần tìm là $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}$.

Câu 3. (3 *điểm*) Lập tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{5}.3^n}{\frac{2}{5}.3^{n-1}} = 3.$$

Suy ra $u_{n+1} = u_n.3$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$.

ĐỀ SỐ 2 *(45 phút)*

Câu 1. (3 *điểm*) Cho dãy số (u_n) với $u_n = (n - 1).\ 2^n + 1$.

Chứng minh rằng công thức truy hồi của dãy trên là

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

Câu 2. (4 *điểm*) Một hội trường có 10 dãy ghế. Biết rằng mỗi dãy ghế sau nhiều hơn mỗi dãy ghế trước 20 ghế và dãy sau cùng có 280 ghế.

Hỏi hội trường có bao nhiêu ghế ngồi ?

Câu 3. (3 *điểm*) Viết ba số xen giữa các số $\frac{1}{2}$ và 8 để được một cấp số nhân có năm số hạng.

Đáp án

Câu 1. (3 *điểm*)

• Dễ thấy $u_1 = 1$.

• Từ công thức của u_n, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n-1)2^{n+1} + 2^{n+1} + 1 \\ &= (n-1)2^n + 1 + (n-1)2^n + 2^{n+1} \\ &= u_n + (n - 1 + 2)2^n \\ &= u_n + (n+1)2^n \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Câu 2. (4 *điểm*) Số ghế ngồi ở mỗi dãy lập thành một cấp số cộng (u_n), trong đó có $d = 20$; $u_n = 280$ và $n = 10$.

Từ giả thiết

$$u_{10} = u_1 + (10 - 1)20 = 280,$$

tìm được $u_1 = 100$, từ đó

$$S_{10} = \frac{10(100 + 280)}{2} = 1900.$$

Vậy hội trường có 1900 ghế ngồi.

Câu 3. (3 *điểm*) Giả sử cấp số nhân cần tìm là $u_1 = \frac{1}{2}$, u_2, u_3, u_4, $u_5 = 8$.

Gọi q là công bội, ta có $u_5 = 8 = \frac{1}{2}.q^4$, suy ra $q^4 = 16$. Vậy $q = \pm 2$.

Ta có hai cấp số nhân

$$\frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8$$

$$\text{và } \frac{1}{2},\ -1,\ 2,\ -4,\ 8.$$