Đề kiểm tra chương IV (tham khảo)

Việc ra một đề kiểm tra phụ thuộc nhiều yếu tố. Trước hết, nó phụ thuộc vào mặt bằng chung về trình độ học sinh của từng lớp cụ thể. Sau đây là hai đề để giáo viên tham khảo.

ĐỀ 1 *(45 phút)*

Câu 1. (2 *điểm*) Tính $\lim\dfrac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$.

Câu 2. (2 *điểm*) Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + ... + \dfrac{1}{3^{n-3}} + ...$

Câu 3. (2 *điểm*) Tính $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x - 4}{3 - x}$.

Câu 4. (2 *điểm*) Tính $\lim\dfrac{3^n + 1 - \sin\dfrac{\pi}{n}}{3^n}$.

Câu 5. (2 *điểm*) Phương trình sau có nghiệm hay không trong khoảng $(-4\ ;\ 0)$:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 7 = 0\ ?$$

Đáp án

Câu 1. (2 *điểm*)

$$\lim \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3} = \lim \frac{2 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3} - 4} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 2. (2 *điểm*) Vì $9, 3, 1, ..., \dfrac{1}{3^{n-3}}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn, có công bội $q = \dfrac{1}{3}$ và $u_1 = 9$ nên

$$S = 9 + 3 + 1 + ... + \frac{1}{3^{n-3}} + ... = \frac{9}{1 - \dfrac{1}{3}} = \frac{27}{2}.$$

Câu 3. (2 *điểm*) Ta có

$$\lim_{x \to 3^-} (x^2 - 2x - 4) = -1 < 0, \quad \lim_{x \to 3^-} (3 - x) = 0$$

và $$3 - x > 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty\ ;\ 3).$$

Do đó, $$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 2x - 4}{3 - x} = -\infty.$$

Câu 4. (2 *điểm*) Ta có

$$\frac{3^n + 1 - \sin\dfrac{\pi}{n}}{3^n} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{3^n}$$

và $$\left|\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{3^n}\right| \leq \frac{1}{3^n} = \left|\frac{1}{3^n}\right|. \qquad (1)$$

Mặt khác, $\lim \frac{1}{3^n} = \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ nên $\left|\frac{1}{3^n}\right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Từ (1) suy ra $\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{3^n}\right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{3^n} = 0.$

Do đó,

$$\lim \frac{3^n + 1 - \sin\frac{\pi}{n}}{3^n} = \lim\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{3^n}\right] = 1.$$

Câu 5. (2 *điểm*)

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 7$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, vì $f(0)\,.\,f(-2) = (-7)\,.\,5 < 0$ nên phương trình có nghiệm trong khoảng $(-2\,;\,0)$ và do đó có nghiệm trong khoảng $(-4\,;\,0)$.

ĐỀ SỐ 2 *(45 phút)*

Câu 1. (3 *điểm*)

a) Cho hai dãy số có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{1}{n^3}$ và $v_n = \frac{2}{4n+1}$.

Tính $\lim u_n$ và $\lim v_n$.

b) Dùng kết quả câu a), chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Câu 2. (4 *điểm*) Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3x+5}{2x-4}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 + x^2 - 2x + 1)$.

Câu 3. (2 *điểm*) Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x+2} & \text{nếu } x\neq -2\\ 3 & \text{nếu } x=-2.\end{cases}$$

Câu 4. (1 *điểm*) Cho ví dụ về hàm số $y = f(x)$ thoả mãn $f(a) \,.\, f(b) < 0$ nhưng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(a\ ;\ b)$.

Đáp án

Câu 1. (3 *điểm*)

a) $\lim u_n = \lim \dfrac{1}{n^3} = 0,\ \lim v_n = \lim \dfrac{2}{4n+1} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{n}}{4+\dfrac{1}{n}} = 0.$ (1)

b) Hàm số $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có u_n, v_n đều thuộc $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ với mọi n và

$$f(u_n) = \sin\dfrac{\pi}{\dfrac{1}{n^3}} = \sin n^3\pi = 0,$$

$$f(v_n) = \sin\dfrac{\pi}{\dfrac{2}{4n+1}} = \sin\dfrac{(4n+1)\pi}{2} = \sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Do đó, $\lim f(u_n) = \lim 0 = 0,\ \lim f(v_n) = \lim 1 = 1.$

Vì $\lim u_n = \lim v_n = 0$ nhưng $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ nên hàm số $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Câu 2. (4 *điểm*)

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x+5}{2x-4} = -\infty$

(vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(3x+5) = 11 > 0,\ \lim(2x-4) = 0$ và $2x - 4 < 0$ với mọi $x < 2$).

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 + x^2 - 2x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3\left(5 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty.$

Câu 3. (2 *điểm*) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

– Với $x \neq -2$:

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$ là hàm số phân thức hữu tỉ nên liên tục trên từng khoảng thuộc tập xác định của nó. Do đó, nó liên tục trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -2)$ và $(-2\ ;\ +\infty)$.

– Với $x = -2$, ta có $f(-2) = 3$.

Mặt khác,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+1)(x+2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2} (x + 1) = -1 \neq f(-2).$$

Do đó, hàm số đã cho không liên tục tại $x = -2$.

Kết luận : Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -2)$ và $(-2\ ;\ +\infty)$ nhưng gián đoạn tại $x = -2$.

Câu 4. (1 *điểm*) Ví dụ với hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$, ta có $f(-1)\ .\ f(1) = -1 < 0$ nhưng phương trình $\dfrac{1}{x} = 0$ vô nghiệm, vì $\dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (vô lí).