Đề kiểm tra cuối năm (tham khảo)

ĐỀ SỐ 1 *(60 phút)*

Câu 1. (2 *điểm*) Giải các phương trình lượng giác :

a) $\cos^2 x + 5\cos x = 2\sin^2 x$;

b) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$.

Câu 2. (3 *điểm*) Cho

$$f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1\ ;$$

$$g(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1.$$

a) Tính $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$ và $\dfrac{f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{g''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

b) Tìm $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Câu 3. (2 *điểm*) Hãy tính số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân. Biết rằng tổng của ba số hạng đầu bằng 10,5 và hiệu của số hạng thứ nhất với số hạng thứ tư bằng 31,5.

Câu 4. (3 *điểm*) Chọn ngẫu nhiên một thẻ từ năm thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4, 5. Kí hiệu :

A là biến cố "Thẻ ghi số bé hơn 3 được chọn" ;

B là biến cố "Thẻ ghi số chẵn được chọn".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Liệt kê các phần tử của A và B.

c) Vì sao A và B không xung khắc ?

d) Tính $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ và $P(A \cup B)$.

Đáp án

Câu 1. (2 *điểm*)

a) $$\cos^2 x + 5\cos x = 2\sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 5\cos x - 2(1-\cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{3}\\ \cos x = -2 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{1}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (2\sin x - \cos x)(1+\cos x) - (1-\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)(2\sin x - \cos x - 1 + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + n2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \quad (n, k \in \mathbb{Z}).\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.$$

Câu 2. (3 *điểm*) Vì

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = (\sin x + 1)(2\sin x - 1),$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = (\sin x - 1)(2\sin x - 1)$$

nên

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}.$$

a) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{\cos x(\sin x - 1) - \cos x(\sin x + 1)}{(\sin x - 1)^2} = \frac{-2\cos x}{(1-\sin x)^2}\ ;$$

$f'(x) = 4\cos x\sin x + \cos x = 2\sin 2x + \cos x$;

$$f''(x) = 4\cos 2x - \sin x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 - 1 = -5\ ;$$

$$g'(x) = 4\sin x\cos x - 3\cos x = 2\sin 2x - 3\cos x\ ;$$

$$g''(x) = 4\cos 2x + 3\sin x \Rightarrow g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 + 3 = -1.$$

Suy ra $\dfrac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g''\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 5.$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -3.$

Câu 3. (2 *điểm*) Kí hiệu u_1 là số hạng đầu và q là công bội của cấp số nhân. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 10,5 \\ u_1 - u_1 q^3 = 31,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 10,5 & (1) \\ u_1(1 - q^3) = 31,5. & (2) \end{cases}$$

Rõ ràng phải có $q \neq 1$. Khi đó, từ (2) ta có

$$u_1 = \frac{31,5}{1 - q^3}.$$

Thay vào (1) :

$$\frac{31,5}{1 - q^3}(1 + q + q^2) = 10,5 \Leftrightarrow \frac{31,5}{1 - q} = 10,5 \Rightarrow q = -2.$$

Thay vào (2) :

$$u_1\,(1 + 8) = 31,5 \Rightarrow u_1 = \frac{31,5}{9} = 3,5.$$

Câu 4. (3 *điểm*)

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$.

c) $A \cap B = \{2\}$ nên A và B không xung khắc.

d) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, $A \cup B = \{1 ; 2 ; 4\}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.

ĐỀ SỐ 2 *(60 phút)*

Câu 1. (2,5 *điểm*) Cho

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 10x} - x.$$

a) Tìm miền xác định của hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm các giới hạn

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{và} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

c) Tính $f'(x)$.

Câu 2. (2,5 *điểm*) Giải các phương trình lượng giác :

a) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$;

b) $3 + 5\sin 2x = \cos 4x$.

Câu 3. (2,5 *điểm*) Giả sử các số hạng của cấp số cộng u_1, u_2, ... đều là số tự nhiên. Tìm cấp số cộng đó, biết rằng tổng chín số hạng đầu tiên lớn hơn 200, bé hơn 220 và $u_2 = 12$.

Câu 4. (2,5 *điểm*) Một lớp có 24 bạn nam và 30 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 bạn. Tính xác suất sao cho trong 4 bạn đó có đúng 3 bạn nam.

Đáp án

Câu 1. (2,5 *điểm*)

a) Hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi x thoả mãn bất đẳng thức

$$x^2 + 10x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -10 \\ x \geq 0. \end{array}\right.$$

Vậy miền xác định của $y = f(x)$ là $(-\infty ; -10] \cup [0 ; +\infty)$.

b) Ta có

$$\sqrt{x^2+10x}-x=\frac{x^2+10x-x^2}{\sqrt{x^2+10x}+x}=\frac{10x}{\sqrt{x^2+10x}+x}.$$

Khi $x \to +\infty$, ta có x dương nên

$$\frac{10x}{\sqrt{x^2+10x}+x}=\frac{10}{\sqrt{1+\frac{10}{x}}+1}.$$

Do đó

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{\sqrt{1+\frac{10}{x}}+1}=5.$$

Khi $x \to -\infty$, ta có x âm nên

$$\frac{10x}{\sqrt{x^2+10x}+x}=\frac{10x}{-x\sqrt{1+\frac{10}{x}}+x}=\frac{10}{1-\sqrt{1+\frac{10}{x}}}.$$

Khi $x \to -\infty$ thì $\sqrt{1+\frac{10}{x}}<1$ và $1-\sqrt{1+\frac{10}{x}}>0$.

Do đó

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{10}{1-\sqrt{1+\frac{10}{x}}}=+\infty.$$

c) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+10x}-x\right)'=\dfrac{2x+10}{2\sqrt{x^2+10x}}-1$

$$=\frac{x+5-\sqrt{x^2+10x}}{\sqrt{x^2+10x}}.$$

Câu 2. (2,5 *điểm*)

a) $\cos 3x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x \Leftrightarrow \cos 3x=\cos x.\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi.$$

• $3x = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

• $3x = -x - \frac{\pi}{6} + h2\pi$

$\Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{6} + h2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + h\frac{\pi}{2} \ (h \in \mathbb{Z}).$

b) $3 + 5\sin 2x = \cos 4x \Leftrightarrow 3 + 5\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 2 = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x$, ta có phương trình $2t^2 + 5t + 2 = 0$ với điều kiện $|t| \leq 1$.

Giải phương trình bậc hai, ta được : $t_1 = -2$ (loại), $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Suy ra

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 3. (2,5 *điểm*) Gọi d là công sai, ta có :

$$S_9 = 9(u_1 + 4d) ;$$

$$u_2 = u_1 + d = 12 \Rightarrow u_1 = 12 - d.$$

Do đó

$$S_9 = 9(12 + 3d) = 108 + 27d.$$

Mặt khác

$$200 < 108 + 27d < 220$$

$$\Leftrightarrow \frac{92}{27} < d < \frac{112}{27} \Leftrightarrow 3\frac{11}{27} < d < 4\frac{4}{27}.$$

Vì d và u_n là các số tự nhiên cho nên $d = 4$ và $u_1 = 12 - d = 12 - 4 = 8$. Vậy cấp số cộng phải tìm là 8, 12, 16, 20, ...

Câu 4. (2,5 *điểm*) Không gian mẫu gồm $n(\Omega) = C_{54}^4$ phần tử.

Kí hiệu A là biến cố : "Trong 4 bạn được chọn có đúng 3 nam". Ta có

$$n(A) = C_{24}^3.C_{30}^1.$$

Vậy
$$P(A) = \frac{C_{24}^3.C_{30}^1}{C_{54}^4} \approx 0,2.$$