ÔN TẬP CHƯƠNG III
(2 tiết)

Việc tổ chức ôn tập Chương III cần được tiến hành trên cơ sở của sự phân loại các kiến thức, kĩ năng cơ bản và các loại bài tập tương ứng.

Giáo viên nên kết hợp ôn tập lí thuyết và bài tập ; thông qua bài tập để hệ thống và khắc sâu kiến thức cơ bản.

Để dạy tốt được hai tiết ôn tập chương, giáo viên cần có sự hướng dẫn học sinh chuẩn bị ở nhà.

I. Kiến thức cơ bản

1. Nội dung của phương pháp quy nạp toán học.

2. Định nghĩa và các tính chất của dãy số.

3. Định nghĩa, các công thức số hạng tổng quát, tính chất và các công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng và cấp số nhân.

Chú ý : Có thể cho học sinh chuẩn bị và giáo viên hệ thống các kiến thức về cấp số trong bảng sau đây.

	Cấp số cộng	**Cấp số nhân**
Định nghĩa	$u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in {}^*$	$u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in {}^*$
Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \geq 2$	$u_n = u_1.q^{n-1}$ với $n \geq 2$
Tính chất	$u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$	$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ với $k \geq 2$ hay $\lvert u_k \rvert = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$
Tổng n số hạng đầu	$S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$ với $n \in {}^*$ hay $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$	$S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$ với $q \neq 1$ $S_n = nu_1$ với $q = 1$, $n \in {}^*$

II. Kĩ năng cơ bản

1. Biết cách áp dụng phương pháp quy nạp toán học vào việc giải toán (có thể chứng minh một điều đã khẳng định hoặc dự đoán kết quả rồi chứng minh).
2. Khảo sát các dãy số về tính tăng, giảm và bị chặn. Tìm (dự đoán) công thức số hạng tổng quát và chứng minh bằng quy nạp.
3. Biết sử dụng định nghĩa để chứng minh một dãy số là cấp số cộng (hoặc cấp số nhân).

   Biết cách lựa chọn một cách hợp lí các công thức để giải các bài toán có liên quan đến các đại lượng u_1, d (hoặc q), u_n, n, S_n.

III. Bài tập

1. Vì $u_{n+1} - u_n = d$ nên nếu $d > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì cấp số cộng tăng

   và nếu $d < 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì cấp số cộng giảm.

2. a) Nếu $q > 0$ thì $u_n < 0$ với mọi n.

   b) Nếu $q < 0$ thì các số hạng mang thứ tự chẵn là số dương còn các số hạng mang thứ tự lẻ là số âm.

3. *Cách 1.* Cho hai cấp số cộng (u_n) và (v_n) có cùng n số hạng

   $u_1, u_2, ..., u_n$ có công sai d_1.

   $v_1, v_2, ..., v_n$ có công sai d_2.

   Nếu cộng tương ứng các số hạng theo thứ tự, ta được

   $$(u_1 + v_1), (u_2 + v_2), ..., (u_n + v_n).$$

   Với $1 \le k \le n$ thì $u_k = u_{k-1} + d_1$ và $v_k = v_{k-1} + d_2$ nên

   $$u_k + v_k = (u_{k-1} + v_{k-1}) + (d_1 + d_2) \text{ với } 1 \le k \le n.$$

   Vậy theo định nghĩa, dãy $(u_n + v_n)$ là cấp số cộng với công sai

   $$d = d_1 + d_2.$$

   Cách 2. Sử dụng công thức số hạng tổng quát, ta có

   $$u_n + v_n = u_1 + (n-1)d_1 + v_1(n-1)d_2$$

   $$= (u_1 + v_1) + (n-1)(d_1 + d_2) \text{ với } n \in \mathbb{N}^*,$$

   từ đây suy ra dãy $(u_n + v_n)$ là cấp số cộng với công sai $d_1 + d_2$.

Ví dụ. Từ hai cấp số cộng có cùng sáu số hạng :

$$2, 5, 8, 11, 14, 17 \text{ với công sai } d_1 = 3,$$

$$-1, 3, 7, 11, 15, 19 \text{ với công sai } d_2 = 4,$$

ta có cấp số cộng với sáu số hạng :

$$1, 8, 15, 22, 29, 36 \text{ với công sai } d = 7.$$

4. Lập luận tương tự đối với hai cấp số nhân có cùng n số hạng :

$$u_1, u_2, ..., u_n \text{ với công bội } q_1,$$

$$v_1, v_2, ..., v_n \text{ với công bội } q_2.$$

Ta có dãy số $u_1.v_1, u_2.v_2, ..., u_n.v_n$ cũng là cấp số nhân với công bội $q = q_1.q_2$.

Thật vậy, với $1 \leq k \leq n$ thì

$$u_k.v_k = (u_{k-1}.q_1).(v_{k-1}.q_2) = (u_{k-1}.v_{k-1}).(q_1.q_2).$$

Đặt $u_k.v_k = x_k$ và $q_1.q_2 = q$ thì $x_k = x_{k-1}.q$ với $1 \leq k \leq n$.

Theo định nghĩa ta có điều phải chứng minh.

5. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

a) Đặt $B_n = 13^n - 1$.

Với $n = 1$ thì $B_1 = 13^1 - 1 = 12$ nên $B_1 \,\vdots\, 6$.

Giả sử đã có $B_k = 13^k - 1 \,\vdots\, 6$.

Ta phải chứng minh $B_{k+1} \,\vdots\, 6$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= 13^{k+1} - 1 = 13.13^k - 13 + 12 \\ &= 13(13^k - 1) + 12 = 13.B_k + 12. \end{aligned}$$

Vì $B_k \,\vdots\, 6$ và $12 \,\vdots\, 6$ nên $B_{k+1} \,\vdots\, 6$. Vậy $13^n - 1$ chia hết cho 6.

b) Đặt $C_n = 3n^3 + 15n$.

Với $n = 1$, $C_1 = 3.1^3 + 15.1 = 18$ nên $C_1 \,\vdots\, 9$.

Giả sử đã có $C_k = 3k^3 + 15k \vdots 9$.

Ta phải chứng minh $C_{k+1} \vdots 9$.

Thật vậy, ta có

$$C_{k+1} = 3(k+1)^3 + 15(k+1)$$
$$= 3k^3 + 15k + 9(k^2 + k + 2) = C_k + 9(k^2 + k + 2).$$

Vì $C_k \vdots 9$ và $9(k^2 + k + 2) \vdots 9$ nên $C_{k+1} \vdots 9$.

Vậy $3n^3 + 15n$ chia hết cho 9.

6. a) 2, 3, 5, 9, 17.

b) Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng quy nạp

với $n = 1$ thì $u_1 = 2^{1-1} + 1 = 2$.

Vậy công thức đúng.

Giả sử đã có $u_k = 2^{k-1} + 1$ với $k \geq 1$. Ta phải chứng minh $u_{k+1} = 2^k + 1$.

Thật vậy, theo công thức xác định dãy số và giả thiết quy nạp, ta có :

$$u_{k+1} = 2u_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1$$
$$= 2^k + 2 - 1 = 2^k + 1.$$

Vậy công thức đã được chứng minh.

7. a) Xét hiệu

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 + \frac{1}{n+1} - n - \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= 1 - \frac{1}{n(n+1)} > 0 \text{ vì } \frac{1}{n(n+1)} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) tăng.

Dễ thấy $n + \frac{1}{n} \geq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

b) Dãy số (u_n) đan dấu vì có nhân tử $(-1)^{n-1}$ nên không tăng và cũng không giảm. Ta có

$$|u_n| = \left|(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}\right| = \left|\sin\frac{1}{n}\right| \le 1 \text{ hay } -1 \le u_n \le 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

c) Viết
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

dễ thấy $u_n > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và dãy số (u_n) giảm vì

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, do

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \ge \sqrt{1+1}+\sqrt{1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \ge \sqrt{2}+1$$

nên
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{2}+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

8. a) Ta có hệ

$$\begin{cases} 5u_1 + 10(u_1+4d) = 0 \\ \dfrac{4(2u_1+3d)}{2} = 14 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7. \end{cases}$$

Đáp số : $u_1 = 8,\ d = -3$.

b) Làm tương tự câu a).

Đáp số : $u_1 = 0,\ d = 3$; $u_1 = -12,\ d = \dfrac{21}{5}$.

9. a) Đưa về hệ $\begin{cases} u_1.q^5 = 192 \\ u_1.q^6 = 384. \end{cases}$

Dễ dàng tìm được $q = 2$ và $u_1 = 6$.

b) Giải hệ

$$\begin{cases} u_1.q^3 - u_1q = 72 \\ u_1.q^4 - u_1q^2 = 144 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u_1q(q^2-1) = 72 & (1) \\ u_1q^2(q^2-1) = 144. & (2) \end{cases}$$

Chia các vế tương ứng của (2) cho (1), ta có $q = 2$, từ đó tìm được $u_1 = 12$.

c) Ta có hệ

$$\begin{cases} u_1q + u_1q^4 - u_1q^3 = 10 \\ u_1q^2 + u_1q^5 - u_1q^4 = 20 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} u_1q(1 + q^3 - q^2) = 10 & (1) \\ u_1q^2(1 + q^3 - q^2) = 20. & (2) \end{cases}$$

Chia các vế tương ứng của phương trình (2) cho phương trình (1), ta được $q = 2$, từ đây tìm được $u_1 = 1$.

10. Ta có cấp số cộng A, B, C, D. Hãy tính các góc B, C, D theo A.

Vì $C = 5A$ nên $A + 2d = 5A \Rightarrow d = 2A$.

Do $A + B + C + D = A + A + 2A + A + 4A + A + 6A = 16A = 360^o$

nên $A = 22^o30'$, suy ra $B = 67^o30'$, $C = 112^o30'$, $D = 157^o30'$.

11. Vì ba số x, y, z lập thành cấp số nhân nên thay các giá trị $y = xq$, $z = xq^2$ vào cấp số cộng $x, 2y, 3z$, ta được cấp số cộng $x, 2xq, 3xq^2$.

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có

$$x + 3xq^2 = 4xq \Rightarrow 1 + 3q^2 = 4q.$$

Giải phương trình

$$3q^2 - 4q + 1 = 0,$$

ta được $q = 1$ và $q = \frac{1}{3}$.

12. Gọi diện tích mặt trên của tầng thứ i là u_i ($i = 1, 2, ..., 11$).

Ta có (u_i) lập thành cấp số nhân với $u_1 = 6144$, $q = \frac{1}{2}$.

Theo công thức (3) ta có

$$u_{11} = u_1.q^{10} = 6144.\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 6.$$

Vậy diện tích mặt trên cùng là 6 m^2.

13. Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}. \qquad (1)$$

Biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow \frac{b-a}{(c+a)(b+c)}=\frac{c-b}{(a+b)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow b^2-a^2=c^2-b^2. \qquad (2)$$

Đẳng thức (2) đúng vì a^2, b^2, c^2 lập thành cấp số cộng.

Vậy đẳng thức (1) là đúng và bài toán đã được chứng minh ở dạng cần và đủ.

Đáp án bài tập trắc nghiệm

14. Mục đích của bài tập này là để học sinh nhận biết các số hạng thứ $n+1$, $n-1$, $2n$, $2n-1$. Khi biết $u_n = f(n) = 3^n$.

Thực chất là tính giá trị của hàm $f(n)$ tại các giá trị tương ứng.

Đáp số : a) (C) ; b) (B) ; c) (B) ; d) (B).

15. Dãy số (A) bị loại (vì các số hạng đan dấu).

Dễ nhận biết dãy số (B) : tăng. Dãy số (C), (D) : giảm.

Đáp số : Dãy số (B) tăng.

16. Mục đích để học sinh kiểm tra nhanh tính chất của cấp số cộng.

Đáp số đúng : (D).

17. Đáp số đúng : (C).

18. Đáp số đúng : (B).

19. Mục đích để nhận biết công thức truy hồi của cấp số nhân.

Đáp số đúng : (B).