ÔN TẬP CUỐI NĂM
(3 tiết)

I. Câu hỏi

Về mặt lí thuyết, khi ôn tập cuối năm, cần hệ thống hoá kiến thức đã học, khắc sâu khái niệm và công thức cần nhớ.

Nên nhắc lại các khái niệm cơ bản, các định lí và các công thức quan trọng.

Hệ thống câu hỏi cuối SGK đã chỉ ra khá đầy đủ những điều cần ôn tập. Tuỳ đối tượng có thể thêm những câu hỏi dễ hoặc khó hơn.

II. Bài tập

1. a) $\cos 2(x + k\pi) = \cos(2x + k2\pi) = \cos 2x$.

b) $y = \cos 2x$;

$y' = -2\sin 2x$;

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$; $\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại $x = \frac{\pi}{3}$ là

$$y = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \text{ hay } y = -\sqrt{3}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}.$$

c) Vì $1 + \cos^2 2x > 0 \;\; \forall x$, nên hàm số xác định với $1 - \cos 2x \geq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \leq 1$, điều này xảy ra với mọi x.

Vậy hàm số xác định với mọi x.

2. a) $\tan a = 0,2$. Tính $A = \frac{5}{6 + 7\sin 2a}$.

Ta có

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a = \frac{2\sin a\cos a}{\sin^2 a + \cos^2 a} = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$= \frac{2.0,2}{1 + (0,2)^2} = \frac{5}{13}.$$

Vậy $A = \dfrac{65}{113}$.

b) $y' = \dfrac{-70\cos 2x}{(6 + 7\sin 2x)^2}$.

c) $y' \le 0 \Leftrightarrow \cos 2x \ge 0$.

Đáp số : $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi ; \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. a) $2\sin\dfrac{x}{2}\cos^2 x - 2\sin\dfrac{x}{2}\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow \left(2\sin\frac{x}{2} - 1\right)\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0 \\ \sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, n \in \quad \text{hoặc} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k4\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + k4\pi\end{array}\right. \quad (k \in \quad).$$

Tập nghiệm là

$$\left\{\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} ; (-1)^k\frac{\pi}{3} + k4\pi \; (n, k \in \quad)\right\}.$$

b) $4\sin x + 3\cos x = 5 \Leftrightarrow \dfrac{4}{5}\sin x + \dfrac{3}{5}\cos x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi.$$

Tập nghiệm là $\left\{\dfrac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ với $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

c) Đặt $\sin x + \cos x = t$. Khi đó

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy ta có $\sin x + \cos x = 1$. Giải ra, ta được

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm là

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\ ;\ k2\pi\ (k \in \quad)\right\}.$$

d) Với $\sin x \geq 0$, phương trình

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$$

tương đương với

$$1 - \cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 1.\end{array}\right.$$

• $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

• $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Nhưng vì $\sin x \geq 0$ và $x \in [\pi\ ;\ 3\pi]$ nên chỉ có các cung $2\pi,\ \dfrac{5\pi}{2}$ là nghiệm.

Tập nghiệm là $\left\{2\pi\ ;\ \dfrac{5\pi}{2}\right\}$.

e) $\left(\cos\dfrac{x}{4} - 3\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\dfrac{x}{4} - 3\cos x\right)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\cos\dfrac{x}{4} + \cos x\sin\dfrac{x}{4} + \cos x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{x}{4}\right) + \cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin\dfrac{5x}{4} + \cos x = 3.$

Vì $\sin\dfrac{5x}{4} \leq 1$, $\cos x \leq 1$ nên phương trình trên vô nghiệm.

4. a) $A_{40}^2 = 1560$; b) $40C_{39}^4$.

5. Số hạng phải tìm là 210.

6. a) $\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}$; b) $1-\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}$.

7. a) $\dfrac{2.9!}{10!}$; b) $\dfrac{2.8!}{10!}$.

8. Ta có

$$u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 27$$

$$\Leftrightarrow u_1 + d = 9 \Leftrightarrow d = 9 - u_1.$$

Từ đó, thay vào phương trình

$$u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275$$

$$\Leftrightarrow \ 3u_1^2 + 6u_1d + 5d^2 = 275,$$

ta được : $2u_1^2 - 36u_1 + 130 = 0$.

Giải phương trình, ta có : $u_1 = 13$, $u_1 = 5$.

Vì $d = 9 - u_1 = 9 - 13 < 0$ không thoả mãn điều kiện cấp số cộng tăng, do đó phải loại trường hợp $u_1 = 13$.

Đáp số : $u_1 = 5$, $d = 4$.

9. Kí hiệu các số hạng của cấp số nhân đã cho là $u_1, u_2, u_3,...,$ công bội là q.

Theo giả thiết ta có :

$$\text{(I)} \begin{cases} u_3 - u_2 = 12 & (1) \\ (u_1 + 10) + u_3 = 2(u_2 + 8). & (2) \end{cases}$$

Vì (1) $\Leftrightarrow u_1q^2 - u_1q = 12 \Leftrightarrow u_1(q^2 - q) = 12$

và (2) $\Leftrightarrow (u_1 + 10) + u_1q^2 = 2(u_1q + 8)$

$$\Leftrightarrow u_1q^2 - 2u_1q + u_1 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow u_1(q - 1)^2 = 6,$$

nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u_1(q-1)^2 = 6 \\ u_1(q^2-q) = 12 \end{cases} \qquad (q \neq 0,\ q \neq 1).$$

Giải hệ trên, ta được $q = 2$, $u_1 = 6$.

Từ đó $S_5 = \dfrac{6(2^5-1)}{2-1} = 186.$

10. a) $\lim \dfrac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1} = \lim \dfrac{4n^3 - 8n^2 - 3n + 9}{n^3+1}$

$$= \lim \frac{4 - \frac{8}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 4.$$

b) $\lim \left(\dfrac{1}{\mathrm{n}^2+1} + \dfrac{2}{\mathrm{n}^2+1} + \dfrac{3}{\mathrm{n}^2+1} + \ldots + \dfrac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}^2+1} \right)$

$= \lim \dfrac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2+1} = \lim \dfrac{n(n-1)}{2n^2+2} = \dfrac{1}{2}.$

c) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+1}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{3}{2}.$

d) $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) = \lim \dfrac{\sqrt{n}(n-1-n)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

$= \lim \dfrac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = -\lim \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\dfrac{1}{2}.$

11. a) $\lim u_n = \lim \dfrac{n}{n^2+1} = \lim \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0.$

b) $\lim v_n = \lim \dfrac{n\cos\dfrac{\pi}{n}}{n^2+1} = \lim \dfrac{\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{n}}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 0.$

12. Chọn $u_n = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi$; $v_n = (2n+1)\pi$.

Ta thấy $u_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$

và $v_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$

Nhưng $\lim y(u_n) = 0$; $\lim y(v_n) = -1$.

Vậy hàm số $y = \cos x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

13. a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{6-3x}{\sqrt{2x^2+1}} = \dfrac{12}{3} = 4$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \frac{1}{4(2+2)} = \frac{1}{16} \ ;$$

c) Khi $x \to 2^+$ thì $x - 2 \to 0^+$ còn $x^2 - 3x + 1 \to -1$. Vậy

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-3x+1}{x-2} = -\infty \ ;$$

d) Khi $x \to 1^-$ thì $|x| < 1$ nên

$$x + x^2 + ... + x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Do đó

$$\lim_{x\to 1^-}\left(x + x^2 + ... + x^n - \frac{n}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x-n}{1-x} = -\infty \ ;$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}} = 2 \ ;$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{4x^2-1}}{2-3x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{4-\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{2}{x}-3} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3} \ ;$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3 + x^2 - 3x + 1) = +\infty.$

14. Xét hàm số $f(x) = x - 1 - \sin x$ và hai số $0 \ ; \pi$. Hàm số này liên tục trên đoạn $[0 \ ; \pi]$ và

$$f(0) = -1 < 0 \ ; \ f(\pi) = \pi - 1 > 0$$

nên phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0 \ ; \pi)$. Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

15. Xét hàm số $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$ và hai số $-1 \ ; 0$.

$f(-1) = 2 > 0 \ ; \ f(0) = -1$ và hàm $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1 \ ; 0]$.

Vậy $\exists c \in (-1 \ ; 0)$ để $f(c) = 0$ hay phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1 \ ; 0)$. Vậy phương trình có nghiệm trong khoảng $(-1 \ ; 3)$.

16. a) $f(x) = \sin^3 2x \Rightarrow f'(x) = 6\sin^2 2x\cos 2x.$

Phương trình

$$f'(x) = g(x) \Leftrightarrow 6\sin^2 2x\cos 2x = 4\cos 2x - 5\sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(6\sin^2 2x + 10\sin 2x - 4) = 0.$$

• $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

• $\sin 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

• $\sin 2x = -2$ (loại).

b) $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$;

$f'(x) = -60\sin 3x - 60\sin 5x + 60\sin 4x = -60(\sin 3x + \sin 5x - \sin 4x)$

$= -60\sin 4x(2\cos x - 1)$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$;

• $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

• $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + l2\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

17. a) $y' = \frac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$; b) $y' = -\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}\sin\sqrt{x^2+1} + \cos\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

c) $y' = x^2\sin x$; d) $y' = \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$.

18. a) $y'' = \frac{2}{(1+x)^3}$; b) $y'' = \frac{2}{x^3} + \frac{2}{(1-x)^3}$;

c) $y'' = -a^2\sin ax$; d) $y'' = 2\cos 2x$.

19. $b = -\frac{1}{2}$; $c = 0$; $d = -\frac{3}{2}$.

20. a) $y = 4x + 1$;

b) $x = k\pi$; $x = \arcsin\dfrac{1}{3} + n2\pi$; $x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + m2\pi$, $(k, m, n \in \mathbb{Z})$.

c) 5.